

ЗАДАЧИ К КУРСУ КВАНТОВОЙ РАДИОФИЗИКИ

1. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

- Задача 1. Найдите собственную функцию $\Psi_{\alpha\lambda}(Q_\lambda)$ оператора уничтожения фотона в моде λ .
- Задача 2. Можно ли одновременно измерить напряженности электрического и магнитного полей? Ответ обосновать расчетом.
- Задача 3. Покажите, что операторы полей удовлетворяют квантовым уравнениям Максвелла:
 $\text{rot } \mathbf{H} = 1/c \cdot d\mathbf{E}/dt$; $\text{rot } \mathbf{E} = -1/c \cdot d\mathbf{H}/dt$
- Задача 4. "Проквантуйте" электрический колебательный контур LC. Каковы его свойства в квантовом случае? В каких приложениях актуальна эта задача?
- Задача 5. Напишите уравнения движения для канонически сопряженных переменных Q_i и P_i для свободного электромагнитного поля. Какой смысл имеют эти уравнения в гейзенберговском представлении? Найдите решение этих уравнений.
- Задача 6. Импульс электромагнитного поля равен $\mathbf{P} = 1/4\pi c \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dv$. Найдите оператор импульса электромагнитного поля и его собственные функции и собственные значения. Можно ли фотону приписать определенное значение импульса?
- Задача 7. Покажите, что в рамках кулоновской калибровки поля операторы канонического импульса k -ой заряженной частицы \mathbf{P}_k и оператор вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}_k)$ перестановочны между собой.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ Э/М ПОЛЯ С ВЕЩЕСТВОМ

- Задача 8. Сделайте оценку величины интенсивности синусоидального поля, при которой сравниваются вероятности индуцированного и спонтанного излучений на заданном переходе?
- Задача 9. На возбужденный двухуровневый атом падает резонансное ($\omega = \omega_{ba}$) электромагнитное поле, состоящее из двух плоских волн. Эти плоские волны имеют одинаковую поляризацию и интенсивность, но распространяются под углом 90° друг к другу. Какова вероятность электродипольного излучения атома в направлении под углом 45° между парциальными волнами? Дипольный момент перехода $d_{12} = 1$ деб.
- Задача 10. Найдите выражение для вероятности излучения фотона квантовой системой в магнитодипольном приближении.
- Задача 11. Используя ортогональность шаровых (сферических) функций, покажите, что правила отбора для магнитодипольного (орбитального) излучения сводятся к соотношениям:
 $\Delta l = 0$, $\Delta m_l = 0, \pm 1$, $\Delta S = 0$, $\Delta m_s = 0$, $n_a = n_b$
- Задача 12. Покажите (используя правила отбора для электродипольного перехода), что правила отбора для электроквадрупольного излучения имеют вид: $\Delta j = j_a - j_b = 0, \pm 1, \pm 2$, а переход $j_b = 0 \Rightarrow j_a = 0$ - запрещен.
- Задача 13. Покажите, что однофотонные переходы между уровнями 2S и 1S атома водорода запрещены в электродипольном, магнитодипольном и электроквадрупольном приближениях.
- Задача 14. Возможно ли индуцированное излучение линейного гармонического осциллятора в электродипольном приближении? Ответ обосновать расчетом.
- Задача 15. Атом находится в поле теплового электромагнитного излучения. Найдите вероятность индуцированного излучения и поглощения.
- Задача 16. Атом находится в поле одномодового лазера. Распределение поля в моде $\mathbf{A}_k(\mathbf{r})$. Найдите выражение для вероятности излучения и поглощения атомом фотона.
- Задача 17. Как изменится четность атома в результате двухфотонного излучения (поглощения)?
- Задача 18. Можно ли, опираясь на соотношение неопределенностей $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, вывести соотношение $\Delta n \Delta \phi \geq \hbar$ (число фотонов и фаза)?
- Задача 19. Рассчитайте в электродипольном приближении вероятность поглощения атомом двух фотонов с частотами ω_α и ω_β .

Задача 20. Докажите, что вероятность индуцированного двухфотонного излучения равна вероятности двухфотонного поглощения.

Задача 21. При каком соотношении частот W_α и W_β вероятность спонтанного двухфотонного излучения максимальна?

3. КВАНТОВАЯ КИНЕТИКА.

Задача 22. Исходя из уравнений для матрицы плотности 2-х уровневой среды и предполагая среду электродипольной, выведите уравнения для поляризации и разности населенностей этой среды, находящейся в электромагнитном поле (квазимонохроматическое поле, резонансное квантовому переходу на частоте w_{12}).

Задача 23. Для 2-х уровневой среды без диссипации ($T_1 = T_2 = \infty$) найдите выражение для разности населенностей при наложении на среду резонансного внешнего поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(w_{21}t)$.

Указание: Использовать уравнения (3) и (4) системы уравнений (33.2) в предположении заданного поля $e_0 = \text{const}$ и точной подстройки резонатора на частоту линии перехода ($\nu = 0$). В этом случае разность фаз поля поляризации $\Phi = -\pi/2$.

Задача 24. Покажите, что вероятность индуцированного излучения атома под действием синусоидального поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}E_0 \cdot \cos(w_{21}t)$ равна: $P_{\text{инд}}^{2 \rightarrow 1} = 4\pi^2 (\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{e})^2 \cdot I \cdot F(w) / (n \cdot c \cdot \hbar)$ [с^{-1}] (см. (28.8) и (28.9)) где I - интенсивность поля в среде с показателем преломления n , а $F(w)$ - нормированный контур линии поглощения (излучения).

Задача 25. Вычислите энергию, передаваемую 2-х уровневой средой, находящейся во внешнем резонансном поле, диссипативной подсистеме (термостату).

Задача 26. Найдите выражение для диэлектрической проницаемости ϵ на частотах ω вблизи резонанса ω_{12} . Указание: Использовать выражение для поляризации.

Задача 27. Диэлектрическая восприимчивость среды $\chi_{ik} = \chi_{ik}' + \chi_{ik}''$ определяется соотношением: $P_i(t) = \text{Re} \{ \sum \chi_{ik} \cdot E_{ok} \cdot \exp(i\omega t) \}$ где i, k - проекции на оси x, y, z , P - поляризация, а поле равно: $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(\omega t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \cdot \exp(-i\omega t) \}$. Найдите действительную χ_{ik}' и мнимую χ_{ik}'' части восприимчивости среды. Указание: Использовать выражение для стационарной поляризации для двухуровневой среды во внешнем резонансном поле.

Задача 28. Найдите связь мощности, поглощаемой 2-х уровневой средой, и мнимой части χ_{ik}'' восприимчивости этой среды.

Задача 29. Найдите силу, действующую на атом со стороны резонансного поля (резонансное световое давление).

Задача 30. Используя второй закон Ньютона, и выражение для силы, действующей на атом со стороны резонансного поля, найдите силу резонансного давления на атом в сильном световом поле. Сделать численные оценки. Указание: $|\vec{F}| = \hbar k |P_{\text{погл}}|$, где $P_{\text{погл}}$ - вероятность поглощения фотона в единицу времени. Использовать также формулу 28.10 в пределе сильного поля.

Задача 33. Во сколько раз в сильном световом поле ускорение атома больше ускорения свободного падения g ?

Задача 34. Исходя из уравнений для матрицы плотности спина $1/2$ (см. (26.8), (26.9)), получите для системы спиновых частиц уравнение Блоха: $d\mathbf{M}/dt = \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}] - (M_x \cdot \mathbf{i} + M_y \cdot \mathbf{j})/T_2 - (M_z - M_z(0)) \cdot \mathbf{k}/T_1$, где $\gamma = -|e|/m_e c$, а намагниченность среды \mathbf{M} вычисляется по формуле $\mathbf{M} = \text{sp}(n_0 \mu \sigma) = n_0 \cdot \sum (\mu \sigma)_{nn}$ (n_0 - концентрация спинов, μ - оператор магнитного дипольного момента), \vec{H} - величина приложенного магнитного поля.

Задача 33. На 2-х уровневый атомный газ воздействует поле $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(w_{21}t)$, w_{21} - боровская частота атомного перехода. Для стационарного режима рассчитайте мощность спонтанного излучения (соударениями в газе пренебречь).

4. КВАНТОВЫЕ УСИЛИТЕЛИ И ГЕНЕРАТОРЫ

Задача 34. Для соседних продольных мод резонатора Фабри-Перо длиной 1м, заполненного активной средой с шириной лоренцовой линии излучения на рабочем переходе $\Delta\omega = 2 \cdot 10^{12}$ рад/сек (рубин), сделайте оценку относительной разницы коэффициентов (показателей) усиления.

Задача 35. Найдите выражение для полосы усиления квантового усилителя бегущей волны длиной L. Насыщением пренебречь. Указание: Использовать стационарное уравнение переноса излучения в волне $\frac{dI}{dz} = -\beta I + \frac{\alpha_0 I}{1+u^2+I}$, где z – ось распространения волны. Обозначения: I – безразмерная интенсивность, полученная нормированием на насыщающую интенсивность для рабочего перехода $I_{нас}$; β – коэффициент нерезонансных потерь в активной среде; $\alpha_0 = \frac{\hbar\omega N_{0эфф}}{2T_1 I_{нас}}$ – коэффициент ненасыщенного усиления, u = $(\omega_{12} - \omega)T_2$ – безразмерная расстройка частоты от центра спектральной линии.

Задача 36. Используя уравнение переноса излучения в стационарной активной среде квантового усилителя бегущей волны: $\frac{dI}{dz} = -\beta I + \frac{\alpha_0 I}{1+u^2+I}$, где z – ось распространения волны, найдите выражение для максимально возможной величины $I_{макс}$ на выходе. Обозначения: I – безразмерная интенсивность, полученная нормированием на насыщающую интенсивность для рабочего перехода $I_{нас}$; β – коэффициент нерезонансных потерь в активной среде; $\alpha_0 = \frac{\hbar\omega N_{0эфф}}{2T_1 I_{нас}}$ – коэффициент ненасыщенного усиления. См.

также формулу 28.14.

Задача 37. Напишите выражение для энергии поля резонансной моды в резонаторе квантового генератора. Указание: использовать выражение для стационарной амплитуды генерации и считать $w_s = w_{12}$.

Задача 38. Считая для рубинового лазера $W_{32} > W_{31}$, A_{31} и используя уравнения баланса населенностей (для диагональных элементов матрицы плотности подсистемы), покажите, что разность населенностей на рабочей паре уровней E_2 и E_1 удовлетворяет уравнению: $dN/dt = (N - N_{0эфф})/T_{1эфф}$ при отсутствии лазерной генерации. Найдите выражения для $N_{0эфф}$ и $T_{1эфф}$. Как эти выражения зависят от мощности поля накачки? Обозначения: W_{13} - вероятность поглощения фотона накачки в единицу времени, W_{31} - вероятность индуцированного излучения под действием источника накачки, W_{32} - вероятность безызлучательного перехода между уровнями 3 и 2, A_{32} и A_{31} - вероятность спонтанного излучения.

Задача 39. Используя классическое определение добротности резонатора (контура) Q : $P(\text{мощность потерь}) = w_s/Q_s \cdot W$ (запасенная в резонаторе энергия) и концепцию двух бегущих в противоположных направлениях плоских волн в резонаторе Фабри-Перо с коэффициентом отражения по мощности R_1 и R_2 , покажите, что добротность Q_s такого резонатора равна $Q_s = -2L \cdot w_s / (c \cdot \ln R_1 R_2)$, где L - длина резонатора.

Задача 40. Считая одно зеркало в резонаторе Фабри-Перо "глухим" ($R_1 = 1$), а другое полупрозрачным ($R_2 = R$), найдите зависимость мощности лазера от R. Существует ли оптимальная величина R ?

Задача 41. Почему мощность лазера определяется величиной насыщающей интенсивности $I_{нас} = c \cdot n \cdot \hbar^2 / (8\pi \cdot d_{12}^2 \cdot T_1 \cdot T_2)$, где n - показатель преломления среды ?

Задача 42. Определить линейный коэффициент усиления (в размерности см^{-1}) слабого сигнала в 2-х уровневой среде. Если концентрация инверсии $N_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, вероятность спонтанного излучения 10^7 сек^{-1} . Линия имеет форму Лоренца с шириной, определяемой спонтанным излучением.

Задача 43. Лазер работает на однородно-уширенном переходе, ширина линии 200 МГц. Вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе $\lambda = 1 \text{ мкм}$, $A_{сп} = 10^7 \text{ с}^{-1}$. Параметры резонатора Фабри-Перо: длина $L = 1 \text{ м}$, полные потери 0,02. Определить пороговую концентрацию инверсии. Указание: полные потери за проход $\beta L = \alpha L - \ln \sqrt{R_1 R_2}$, физический смысл β поясняет

(28.14), добротность резонатора со средой для s-типа колебаний $Q_s = \frac{\omega_s}{\beta c}$

Задача 44. На примере продольных мод показать, что наличие в резонаторе лазера активной среды с инверсией населенности вызывает сдвиг резонансных частот к центру спектральной

линии излучения среды. Указание: Использовать выражение для резонансных частот продольных типов колебаний оптического резонатора и для диэлектрической проницаемости среды. $4\pi\chi'$ считать малой величиной по сравнению с 1 (χ' - действительная часть диэлектрической восприимчивости среды).

Задача 45. Вычислите вероятность спонтанного излучения атома водорода при переходе с уровня 2P в 1S состояние. Указание : использовать атомные волновые функции.

Задача 46. Активная среда лазера заполняет все пространство между плоскопараллельными зеркалами резонатора. Коэффициент усиления среды в отсутствие поля $\alpha_0 = 0,008 \text{ см}^{-1}$ (ненасыщенное усиление). В рамках одномерной задачи (z - направление оси лазера) и считая, что при наличии в резонаторе волн интенсивностей I_+ и I_- коэффициент усиления изменяется как $\alpha(z) = \alpha_0 \cdot [1 + (I_+ + I_-)/I_0]^{-1}$, найти интенсивности волн I_+ и I_- на зеркалах. $I_{\text{нас}} = 30 \text{ Вт/см}^2$ - насыщающая интенсивность, $L = 100 \text{ см}$ - длина лазерного резонатора, $R_1 = 1$ и $R_2 = 0,49$ - коэффициенты отражения зеркал. Условие самовозбуждения лазера считать выполненным.

Задача 47. Оценить минимальную мощность лампы-накачки (к.п.д. = 100 %), необходимую для создания инверсии в твердотельном лазере с концентрацией активных частиц $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$, объемом кристалла $V = 10 \text{ см}^3$. Частота середины полосы оптической накачки равна $\nu = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$, время жизни частиц на верхнем рабочем уровне $t_{\text{сп}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$.

Задача 48. Для гелий-неонового лазера ($\lambda = 632,8 \text{ нм}$) подсчитайте число продольных мод, попадающих в контур спектральной линии излучения.

Задача 49. Нарисуйте и объясните график зависимости мощности лазера от величины отражения выходного зеркала резонатора.

Задача 50. Докажите, что в стационарном режиме одномодовой генерации разность населенностей равна пороговому значению.

Задача 51. Рассчитайте величину минимальной концентрации ионов Cr^{3+} в рубиновом ОКГ.

Задача 52. Сделайте численные оценки насыщающей интенсивности для рабочих переходов в рубиновом и неодимовом лазерах. Какой из этих лазеров обладает большей мощностью?

Задача 53. Рассчитайте минимально необходимую мощность источника накачки для неодимового лазера на кристалле YAG. Указание: Использовать следующий набор параметров этого ОКГ : вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе $A_{32} = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$; центр полосы поглощения $\lambda \sim 800 \text{ нм}$. Длина волны излучения $1,06 \text{ мкм}$. Пороговая разность населенностей $N_{0\text{эфф}} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, объем рабочей среды $V = 10 \text{ см}^3$.

Задача 54. При какой длине газоразрядной трубки гелий-неонового лазера возможен режим одномодовой генерации на одной продольной моде резонатора?

Задача 55. Найдите условие самовозбуждения квантового генератора при условии, что спектральный контур линии рабочего вещества этого генератора определяется только спонтанным излучением. Изменится ли это условие при переходе от электродипольного рабочего перехода к магнитодипольному?