

## ЗАДАЧИ К КУРСУ КВАНТОВОЙ РАДИОФИЗИКИ

### 1. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Задача 1. Выведите выражения для оператора Гамильтона свободного электромагнитного поля.

Задача 2. Можно ли одновременно измерить напряженности электрического и магнитного полей? Ответ обосновать расчетом.

Задача 3. Покажите, что операторы полей удовлетворяют квантовым уравнениям Максвелла:  $\text{rot } \mathbf{H} = 1/c \cdot d\mathbf{E}/dt$ ;  $\text{rot } \mathbf{E} = -1/c \cdot d\mathbf{H}/dt$

Задача 4. Покажите, что дисперсии напряженностей электрического и магнитного полей в стационарном состоянии равны следующим выражениям:

$$D_{ni}(\mathbf{E}) = 1/c^2 \cdot \sum \hbar w_i (n_i + 1/2) \cdot |\mathbf{A}_i(\mathbf{r})|^2 \quad D_{ni}(\mathbf{H}) = \sum \hbar/w_i (n_i + 1/2) \cdot |\text{rot } \mathbf{A}_i(\mathbf{r})|^2$$

Задача 5. "Проквантуйте" электрический колебательный контур LC. Каковы его свойства в квантовом случае? В каких приложениях актуальна эта задача?

Задача 6. Найдите распределение вероятностей для напряженности электрического поля в стационарном состоянии.

Задача 7. Напишите уравнения движения для канонически сопряженных переменных  $Q_i$  и  $P_i$  для свободного электромагнитного поля. Какой смысл имеют эти уравнения в гейзенберговском представлении? Найдите решение этих уравнений.

Задача 8. Импульс электромагнитного поля равен  $\mathbf{P} = 1/4\pi c \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dv$ . Найдите оператор импульса электромагнитного поля и его собственные функции и собственные значения. Можно ли фотону приписать определенное значение импульса?

Задача 9. Покажите, что в рамках кулоновской калибровки поля операторы канонического импульса  $k$ -ой заряженной частицы  $\mathbf{P}_k$  и оператор вектор-потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_k)$  перестановочны между собой.

### 2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ Э/М ПОЛЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Задача 10. Сделайте оценку величины интенсивности синусоидального поля, при которой сравниваются вероятности индуцированного и спонтанного излучений на заданном переходе?

Задача 13. Покажите, что в электродипольном приближении канонический импульс  $k$ -ой заряженной частицы  $\mathbf{P}_k$  и её дипольный момент  $\mathbf{d}_k$  связаны соотношением:

$$(\mathbf{P}_k)_{ba} = (im_k/e_k) \cdot w_{ba} \cdot (\mathbf{d}_k)_{ba}$$

Задача 12. Докажите малость оператора взаимодействия  $V = -(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$  для реальных в эксперименте величин электрических полей.

Задача 13. На возбужденный двухуровневый атом падает резонансное ( $w = w_{ba}$ ) электромагнитное поле, состоящее из двух плоских волн. Эти плоские волны имеют одинаковую поляризацию и интенсивность, но распространяются под углом  $90^\circ$  друг к другу. Какова вероятность электродипольного излучения атома в направлении под углом  $45^\circ$  между парциальными волнами? Дипольный момент перехода  $d_{12} = 1$  деб.

Задача 14. Найдите выражение для вероятности излучения фотона квантовой системой в электроквадрупольном приближении.

Задача 15. Используя ортогональность шаровых (сферических) функций, покажите, что правила отбора для магнитодипольного (орбитального) излучения сводятся к соотношениям:  $\Delta l = 0$ ,  $\Delta m_l = 0, \pm 1$ ,  $\Delta S = 0$ ,  $\Delta m_s = 0$ ,  $n_a = n_b$

Задача 16. Используя ортогональность спиновых функций  $S_s, m_s$ , покажите, что правила отбора для магнитодипольного (спинового) излучения сводятся к соотношениям:

$$\Delta S = 0, \quad \Delta m_l = 0, \quad \Delta l = 0, \quad \Delta m_s = 0, \pm 1, \quad n_a = n_b$$

Задача 17. Покажите (используя правила отбора для электродипольного перехода), что правила отбора для электроквадрупольного излучения имеют вид:  $\Delta j = j_a - j_b = 0, \pm 1, \pm 2$ , а переход  $j_b = 0 \Rightarrow j_a = 0$  - запрещен.

Задача 18. Покажите, что однофотонные переходы между уровнями 2S и 1S атома водорода запрещены в электродипольном, магнитодипольном и электроквадрупольном приближениях.

Задача 19. Возможно ли индуцированное излучение линейного гармонического осциллятора в электродипольном приближении? Ответ обосновать расчетом.

Задача 20. Атом находится в поле теплового электромагнитного излучения. Найдите вероятность индуцированного излучения и поглощения.

Задача 21. Атом находится в поле одномодового лазера. Распределение поля в моде  $A_k(\mathbf{r})$ . Найдите выражение для вероятности излучения и поглощения атомом фотона.

Задача 22. Покажите, что вероятность поглощения фотона в единицу времени связана с интенсивностью (плотностью мощности) падающего излучения соотношением  $P_{a, n_i} \rightarrow b, n_i - 1 [c^{-1}] = \sigma_{\text{погл}} \cdot I / (\hbar \omega)$ , где  $\sigma_{\text{погл}}$  - сечение поглощения среды (атома),  $I$  - интенсивность.

Задача 23. Докажите равенство вероятностей индуцированного излучения на стоксовой и антистоксовой компонентах.

Задача 24. Рассчитайте в электродипольном приближении вероятность поглощения атомом двух фотонов с частотами  $\omega_\alpha$  и  $\omega_\beta$ .

Задача 25. Докажите, что вероятность индуцированного двухфотонного излучения равна вероятности двухфотонного поглощения.

Задача 26. При каком соотношении частот  $\omega_\alpha$  и  $\omega_\beta$  вероятность спонтанного двухфотонного излучения максимальна?

Задача 27. Используя выражение для вероятности комбинационного рассеяния на стоксовой компоненте, найдите вероятность рэлеевского рассеяния.

Задача 28. Во сколько раз интенсивность рассеяния синих лучей ( $\lambda = 0,45 \text{ мкм}$ ) больше интенсивности рассеяния красного света ( $0,7 \text{ мкм}$ )?

Задача 29. Найдите выражение для добротности спектральной атомной линии  $Q_\lambda$ , обусловленной спонтанным излучением.

Задача 30. Найдите ширину линии спонтанного излучения для перехода  $E_b \Rightarrow E_a$  при условии, что возможно спонтанное излучение с уровней  $E_b$  и  $E_a$  на ниже расположенные уровни  $E_i$ .

Задача 31. Найдите ширину линии спонтанного излучения осциллятора при переходе с уровня  $E_1$  на уровень  $E_0$ . Наблюдается ли такая ситуация в эксперименте?

### 3. КВАНТОВАЯ КИНЕТИКА.

Задача 32. Покажите, что для 2-х уровневой системы связь между релаксационными вероятностями перехода  $W_{i,k}$  и продольным временем релаксации  $T_1$  определяется соотношением:  $W_{2,1} \cdot \sigma_{22} - W_{1,2} \cdot \sigma_{11} = 1/(2T_1) \cdot [(\sigma_{22} - \sigma_{11}) - (\sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)})]$ .

Задача 33. Исходя из уравнений для матрицы плотности 2-х уровневой среды и предполагая среду электродипольной, выведите уравнения для поляризации и разности населенностей этой среды, находящейся в электромагнитном поле (квазимонохроматическое поле, резонансное квантовому переходу на частоте  $\omega_{12}$ ).

Задача 34. Для 2-х уровневой среды без диссипации ( $T_1 = T_2 = \infty$ ) найдите выражение для разности населенностей при наложении на среду резонансного внешнего поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(\omega_{21}t)$ .

Задача 35. Для 2-х уровневой среды без диссипации ( $T_1 = T_2 = \infty$ ) найдите выражение для поляризации при наложении на среду резонансного внешнего поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(\omega_{21}t)$ .

Задача 36. Покажите, что вероятность индуцированного излучения атома под действием синусоидального поля  $\mathbf{E} = eE_0 \cdot \cos(\omega_{21}t)$  равна:  $P_{2 \rightarrow 1}^{\text{инд}} = 4\pi^2 (\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{e})^2 \cdot I \cdot F(\omega) / (n \cdot c) \quad [c^{-1}]$

где  $I$  - интенсивность поля в среде с показателем преломления  $n$ , а  $F(\omega)$  - нормированный контур линии поглощения (излучения).

Задача 37. Вычислите энергию, передаваемую 2-х уровневой средой, находящейся во внешнем резонансном поле, диссипативной подсистеме (термостату).

Задача 38. Диэлектрическая восприимчивость среды  $\chi_{ik} = \chi_{ik}' + \chi_{ik}''$  определяется соотношением:  $P_i(t) = \text{Re} \{ \sum \chi_{ik} \cdot E_{ok} \cdot \exp(i\omega t) \}$  где  $i, k$  - проекции на оси  $x, y, z$ ,  $P$  - поляризация, а поле равно:  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(\omega t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \cdot \exp(-i\omega t) \}$ . Найдите действительную  $\chi_{ik}'$  и мнимую  $\chi_{ik}''$  части восприимчивости среды. Указание: Использовать выражение для стационарной поляризации для двухуровневой среды во внешнем резонансном поле.

Задача 39. Найдите связь мощности, поглощаемой 2-х уровневой средой, и мнимой части  $\chi_{ik}''$  восприимчивости этой среды.

Задача 40. Найдите силу, действующую на атом со стороны резонансного поля (резонансное световое давление).

Задача 41. Во сколько раз в сильном световом поле ускорение атома больше ускорения свободного падения  $g$ ?

Задача 42. Запишите уравнение для матрицы плотности спина  $1/2$  в магнитном поле:  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$ , где  $\mathbf{H}_0$  - постоянное магнитное поле, расщепляющее энергетические уровни спина (эффект Зеемана), а  $\mathbf{H}_1$  - перпендикулярное к  $\mathbf{H}_0$  переменное магнитное поле с частотой, близкой к частоте перехода между зеемановскими подуровнями спина  $1/2$ . Указание: Использовать уравнение для матрицы плотности подсистемы двухуровневой среды.

Задача 43. Исходя из уравнений для матрицы плотности спина  $1/2$ , получите для системы спиновых частиц уравнение Блоха:  $d\mathbf{M}/dt = \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}] - (M_x \cdot \mathbf{i} + M_y \cdot \mathbf{j})/T_2 - (M_z - M_z(0)) \cdot \mathbf{k}/T_1$

где  $\gamma = -|e|/m_e c$ , а намагниченность среды  $\mathbf{M}$  вычисляется по формуле  $\mathbf{M} = \text{sp}(n_0 \mu \sigma) = n_0 \cdot \sum (\mu \sigma)_{nn}$  ( $n_0$  - концентрация спинов,  $\mu$  - оператор магнитного дипольного момента).

Задача 44. Имеется 2-х уровневая среда (диссипации нет), на которую действует синусоидальное поле частоты  $\omega \sim \omega_{12}$ . Найдите поляризацию среды.

Задача 45. На 2-х уровневый атомный газ воздействует поле  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cdot \cos(\omega_{21}t)$ ,  $\omega_{21}$  - боровская частота атомного перехода. Для стационарного режима рассчитайте мощность спонтанного излучения (соударениями в газе пренебречь).

#### 4. КВАНТОВЫЕ УСИЛИТЕЛИ И ГЕНЕРАТОРЫ

Задача 46. Для соседних продольных мод резонатора Фабри-Перо длиной  $1\text{ м}$ , заполненного активной средой с шириной лоренцевой линии излучения на рабочем переходе  $\Delta\omega = 2 \cdot 10^{12}$  рад/сек (рубин), сделайте оценку относительной разницы коэффициентов (показателей) усиления.

Задача 47. Используя укороченные уравнения для квантового генератора и условия стационарности режима генерации, найдите выражение для  $\sin \Phi^c$ , где  $\Phi^c$  - стационарное значение разности фаз поля и поляризации. Чему равно  $\Phi^c$  при точной настройке частоты резонатора на частоту линии атомного перехода?

Задача 48. Напишите выражение для энергии поля резонансной моды в резонаторе квантового генератора. Указание: использовать выражение для стационарной амплитуды генерации и считать  $\omega_s = \omega_{12}$ .

Задача 49. Считая для рубинового лазера  $W_{32} > W_{31}$ ,  $A_{31}$  и используя уравнения баланса населенностей (для диагональных элементов матрицы плотности подсистемы),

покажите, что разность населенностей на рабочей паре уровней  $E_2$  и  $E_1$  удовлетворяет уравнению:  $dN/dt = (N - N_{0\text{эфф}}) / T_{1\text{эфф}}$  при отсутствии лазерной генерации. Найдите выражения для  $N_{0\text{эфф}}$  и  $T_{1\text{эфф}}$ . Как эти выражения зависят от мощности поля накачки? Обозначения:  $W_{13}$  - вероятность поглощения фотона накачки в единицу времени,  $W_{31}$  - вероятность индуцированного излучения под действием источника накачки,  $W_{32}$  - вероятность безызлучательного перехода между уровнями 3 и 2,  $A_{32}$  и  $A_{31}$  - вероятность спонтанного излучения.

Задача 50. Используя классическое определение добротности резонатора (контура)  $Q$ :

$P$  (мощность потерь) =  $w_s / Q_s \cdot W$  (запасенная в резонаторе энергия) и концепцию двух бегущих в противоположных направлениях плоских волн в резонаторе Фабри-Перо с коэффициентом отражения по мощности  $R_1$  и  $R_2$ , покажите, что добротность  $Q_s$  такого резонатора равна  $Q_s = -2L \cdot w_s / (c \cdot \ln R_1 R_2)$ , где  $L$  - длина резонатора.

Задача 51. Считая одно зеркало в резонаторе Фабри-Перо "глухим" ( $R_1 = 1$ ), а другое полупрозрачным ( $R_2 = R$ ), найдите зависимость мощности лазера от  $R$ . Существует ли оптимальная величина  $R$ ?

Задача 52. Почему мощность лазера определяется величиной насыщающей интенсивности  $I_{\text{нас}} = c \cdot n \cdot h^2 / (8\pi \cdot d_{12}^2 \cdot T_1 \cdot T_2)$ , где  $n$  - показатель преломления среды?

Задача 53. Оцените максимально возможную величину затягивания частоты генерирующей моды в лазере на рубине.

Задача 54. Определить линейный коэффициент усиления слабого сигнала в 2-х уровневой среде. Если концентрация инверсии  $N_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ , вероятность спонтанного излучения  $10^7 \text{ сек}^{-1}$ . Линия имеет форму Лоренца с шириной, определяемой спонтанным излучением.

Задача 55. Найдите связь между коэффициентом поглощения (усиления) среды и мнимой частью диэлектрической проницаемости  $\epsilon'' = \text{Im } \epsilon$ .

Задача 56. Газовый лазер работает на однородно-уширенном переходе, ширина линии 200 МГц. Вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе  $\lambda = 1 \text{ мкм}$ ,  $A_{\text{сп}} = 10^7 \text{ с}^{-1}$ . Параметры резонатора Фабри-Перо: длина  $L = 1 \text{ м}$ , полные потери 0,02. Определить пороговую концентрацию инверсии.

Задача 57. На примере продольных мод показать, что наличие в резонаторе лазера активной среды с инверсией населенности вызывает сдвиг резонансных частот к центру спектральной линии излучения среды. Указание: Использовать выражение для резонансных частот продольных типов колебаний оптического резонатора и для диэлектрической проницаемости среды.  $4\pi\chi'$  считать малой величиной по сравнению с 1 ( $\chi'$  - действительная часть диэлектрической восприимчивости среды).

Задача 58. Вычислите вероятность спонтанного излучения атома водорода при переходе с уровня 2P в 1S состояние.

Задача 59. Активная среда лазера заполняет все пространство между плоскопараллельными зеркалами резонатора. Коэффициент усиления среды в отсутствие поля  $g_0 = 0,008 \text{ см}^{-1}$ . В рамках одномерной задачи ( $z$  - направление оси лазера) и считая, что при наличии в резонаторе волн интенсивностей  $I_+$  и  $I_-$  коэффициент усиления изменяется как  $g(z) = g_0 \cdot [1 + (I_+ + I_-) / I_0]^{-1}$ , найти интенсивности волн  $I_+$  и  $I_-$  на зеркалах.  $I_0 = 30 \text{ Вт/см}^2$  - насыщающая интенсивность,  $L = 100 \text{ см}$  - длина лазерного резонатора,  $R_1 = 1$  и  $R_2 = 0,49$  - коэффициенты отражения зеркал. Условие самовозбуждения лазера считать выполненным.

Задача 60. Оценить минимальную мощность лампы-накачки (к.п.д. = 100%), необходимую для создания инверсии в твердотельном лазере с концентрацией активных частиц  $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , объемом кристалла  $V = 10 \text{ см}^3$ . Частота середины полосы оптической накачки равна  $\nu = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ , время жизни частиц на верхнем рабочем уровне  $t_{\text{сп}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ .

Задача 61. Для гелий-неонового лазера ( $\lambda = 632,8 \text{ нм}$ ) подсчитайте число продольных мод, попадающих в контур спектральной линии излучения.

Задача 62. Нарисуйте и объясните график зависимости мощности лазера от величины отражения выходного зеркала резонатора.

Задача 63. Докажите, что в стационарном режиме одномодовой генерации разность населенностей равна пороговому значению.

Задача. Рассчитайте величину минимальной концентрации ионов  $\text{Cr}^{3+}$  в рубиновом ОКГ.

Задача. Найдите собственную функцию  $\Psi_{\alpha\lambda}(Q_\lambda)$  оператора уничтожения фотона в моде  $\lambda$ .

Для 2-х уровневой среды без диссипации ( $T_1 = T_2 = \infty$ ) найдите выражение для разности населенностей при наложении на среду резонансного внешнего поля

$E = E_0 \cdot \cos(\omega_{21}t)$ . Указание: Использовать уравнения для поляризации и разности населенностей в заданном поле. Решение искать в виде  $\vec{P}(t) = \vec{P}_1(t) \cos \omega_{12}t + \vec{P}_2(t) \sin \omega_{12}t$ , где  $P_1$  и  $P_2$  – медленно меняющиеся амплитуды.

Задача. Сделайте численные оценки насыщающей интенсивности для рабочих переходов в рубиновом и неодимовом лазерах. Какой из этих лазеров обладает большей мощностью?

Задача. Используя второй закон Ньютона, и выражение для силы, действующей на атом со стороны резонансного поля, найдите силу резонансного давления на атом в сильном световом поле. Сделайте численные оценки. Указание:  $|\vec{F}| = |\hbar k|P_{i\bar{a}\bar{a}e}$ , где  $P_{\text{полг}}$  – вероятность поглощения фотона в единицу времени. Использовать также формулу 28.8 в пределе сильного поля.

Задача. Стационарный одномодовый режим генерации рубинового лазера. Оцените максимально возможную величину затягивания частоты генерации.

Задача. Используя уравнение переноса излучения в стационарной активной среде квантового усилителя бегущей волны:  $\frac{dI}{dz} = -\beta I + \frac{\alpha_0 I}{1 + u^2 + I}$ , где  $z$  – ось распространения волны, найдите

выражение для максимально возможной величины  $I_{\text{макс}}$  на выходе. Обозначения:  $I$  – безразмерная интенсивность, полученная нормированием на насыщающую интенсивность для рабочего перехода  $I_{\text{нас}}$ ;  $\beta$  – коэффициент нерезонансных потерь в активной среде;  $\alpha_0 = \frac{\hbar \omega N_{0y\bar{a}\bar{a}}}{2T_1 I_{i\bar{a}\bar{a}}}$  – коэффициент ненасыщенного усиления.

См. также формулы 28.8 и 28.13.

Задача. На примере продольных мод покажите, что наличие в резонаторе ОКГ активной среды с инверсной населенностью вызывает сдвиг резонансных частот этих мод к центру спектральной линии. Указание: Использовать выражение для резонансных частот продольных мод оптического резонатора и для диэлектрической проницаемости активной среды. Проницаемость среды  $\chi'$  считать малой величиной:  $4\pi\chi' \ll 1$

Задача. Напишите выражение для энергии поля резонансной моды в резонаторе квантового генератора. Указание: использовать выражение для стационарной амплитуды генерации

Задача. Найдите выражение для диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  на частотах  $\omega$  вблизи резонанса  $\omega_{12}$ . Указание: Использовать выражение для поляризации 28.4.

Задача. Рассчитайте минимально необходимую мощность источника накачки для неодимового лазера на кристалле YAG. Указание: Использовать следующий набор параметров этого ОКГ: вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе  $A_{32} = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; центр полосы поглощения  $\lambda \sim 800 \text{ нм}$ . Длина волны излучения 1,06 мкм. Пороговая разность населенностей  $N_{0\text{эфф}} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , объем рабочей среды  $V = 10 \text{ см}^3$ .

Задача. Найдите выражение для полосы усиления квантового усилителя бегущей волны длиной  $L$ . Насыщением пренебречь. Указание: Использовать стационарное уравнение переноса излучения в волне  $\frac{dI}{dz} = -\beta I + \frac{\alpha_0 I}{1 + u^2 + I}$ , где  $z$  – ось распространения волны. Обозначения:  $I$  – безразмерная интенсивность, полученная нормированием на насыщающую интенсивность для рабочего перехода  $I_{\text{нас}}$ ;  $\beta$  – коэффициент нерезонансных потерь в активной среде;  $\alpha_0 = \frac{\hbar \omega N_{0y\delta\delta}}{2T_1 I_{\text{нас}}}$  – коэффициент ненасыщенного усиления,  $u = (\omega_{12} - \omega)T_2$  – безразмерная расстройка частоты от центра спектральной линии.