

## РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПЕКТРАЛЬНО УЗКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ (МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН)

До сих пор мы ограничивались рассмотрением элементарных нелинейных взаимодействий с участием трех пространственно однородных волн (мод свободного пространства или кольцевого резонатора) либо аналогичных процессов стационарного взаимодействия трех волн в пространстве. Теперь перейдем к рассмотрению более сложного процесса – взаимодействия пространственно локализованных волн. На спектральном языке это узкие волновые пакеты пространственных гармоник.

Рассмотрим эффект захвата (пленения) слабых волн импульсом накачки, который имеет важное значение для понимания особенностей резонансного взаимодействия локализованных волн. Для одномерной задачи в приближении заданного поля волны накачки имеем уравнения

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = \sigma_2 a_1^* a_3. \quad (1)$$

После перехода в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью импульса накачки  $V_3$  (см. предыдущие лекции), получим следующие уравнения (для координаты и времени сохраним прежние обозначения)

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (2)$$

где  $u_1 = V_1 - V_3$ ,  $u_2 = V_3 - V_2$ . Необходимое условие, обеспечивающее возможность захвата (пленения) слабых волн импульсом накачки, состоит в том, что по отношению к импульсу накачки слабые волны распространяются в разные стороны. Для системы (2) оно записывается как  $u_1 > 0$  и  $u_2 > 0$ . В сопутствующей накачке системе отсчета, в которой записаны уравнения (2), получаем стационарный профиль накачки:  $a_3 = a_{30}(x)$ . Далее будем рассматривать прямоугольный импульс накачки, формально удовлетворяющий гиперболическому уравнению для  $a_3$  несмотря на наличие скачков. Для определенности остановимся на случае равновесной консервативной среды, когда распадной является волна наибольшей частоты. При этом выполнено условие  $\sigma_1 \sigma_2^* > 0$  (см. предыдущие лекции).

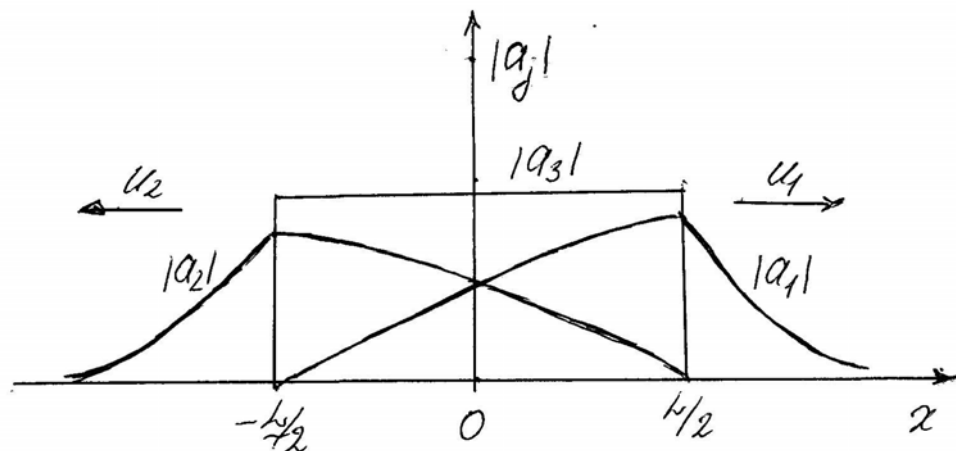


Рис. 1 Иллюстрация к эффекту захвата слабых волн импульсом накачки (конфигурация поля в системе отсчета, сопровождающей импульс накачки при нарастании амплитуд слабых волн)

Предполагаемое распределение поля внутри импульса накачки показано на рис. 1. Качественный анализ процесса взаимодействия волн позволяет предположить, что внутри импульса накачки может возникнуть самоподдерживающееся перекрытие полей всех волн. Поскольку волна  $a_1$  в этой области при взаимодействии с накачкой генерирует волну  $a_1$ , а волна  $a_2$  генерирует  $a_1$ , возникает положительная обратная связь через встречные волны, которая создает условия для развития неустойчивости. За пределами импульса накачки с каждой стороны остается одна из волн, уносящая энергию из области взаимодействия. Если внутри импульса накачки поле нарастает, то поля уходящих волн в соответствии с принципом причинности должны спадать при удалении от импульса накачки.

Попробуем теперь построить решение данной задачи. Рассматривается линейная система, которая включает в себя второе и третье уравнения (2) с фиксированным профилем накачки  $a_3 = a_{30}(x)$ . Используя метод разделения переменных, будем искать решение в виде

$$a_1 = a_{10} \exp(\Gamma t) f_1(x), \quad a_2 = a_{20} \exp(\Gamma^* t) f_2(x), \quad (3)$$

где  $\Gamma$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  – комплексные постоянные,  $f_{1,2}$  – неизвестные функции. Поскольку при  $|x| > L/2$  накачка отсутствует ( $a_3 = 0$ ) имеем в этой области пару уравнений  $\Gamma f_1 + u_1 f_1' = 0$  и  $\Gamma^* f_2 - u_2 f_2' = 0$ . Будем искать конфигурации волнового поля, обладающие конечной энергией. Тогда следует взять исчезающие на бесконечности решения этих уравнений, которые имеют вид (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} f_1 &= C_1 \exp(-\Gamma x/u_1), \quad f_2 = 0 \quad (x > L/2), \\ f_2 &= C_2 \exp(\Gamma^* x/u_2), \quad f_1 = 0 \quad (x < -L/2), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C_{1,2} = \text{const}$  и предполагается, что  $\text{Re}(\Gamma) > 0$  (именно этот случай, когда возникает неустойчивость, нас интересует в первую очередь).

Амплитуда накачки постоянна в области  $-L/2 < x < L/2$ . Поэтому легко выразить  $f_2$  через  $f_1$

$$f_2^* = \frac{a_{10}}{\sigma_1 a_{20}^* a_3} (\Gamma f_1 + u_1 f_1'). \quad (5)$$

и перейти к одному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами для  $f_1$ :

$$f_1'' - \frac{\Gamma(u_1 - u_2)}{u_1 u_2} f_1' + \frac{\Gamma_0^2 - \Gamma^2}{u_1 u_2} f_1 = 0, \quad (6)$$

где  $\Gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2^*} |a_3|$  – инкремент развивающейся во времени параметрической неустойчивости в поле однородной по всему пространству накачки (см. предыдущие лекции). В равновесной среде подкоренное выражение положительное и  $\Gamma_0$  – положительное вещественное число. Решение (6) представляется в виде  $f_1 = \bar{C}_1 \exp(p_1 x) + \bar{C}_2 \exp(p_2 x)$ , где  $\bar{C}_{1,2}$  произвольные постоянные. При этом показатели экспонент имеют вид

$$p_{1,2} = \frac{\Gamma(u_1 - u_2)}{2u_1 u_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma^2(u_1 + u_2)^2}{u_1^2 u_2^2} - \frac{4\Gamma_0^2}{u_1 u_2}} \quad (7)$$

Используя (2), можно показать, что амплитуды волн и, следовательно, функции  $f_{1,2}$  непрерывны на краях импульса накачки, т.е. выполняются соотношения  $f_{1,2}(L/2 + 0) = f_{1,2}(L/2 - 0)$ ,  $f_{1,2}(-L/2 - 0) = f_{1,2}(-L/2 + 0)$ . Эти четыре условия сшивки решений на границах импульса накачки дают четыре однородных линейных уравнения

для определения  $C_{1,2}$  и  $\bar{C}_{1,2}$ . Порядок этой системы уравнений легко понизить до второго, выразив  $C_{1,2}$  через  $\bar{C}_{1,2}$ . Из условия существования нетривиальных решений (обращение определителя в ноль) получаем характеристическое уравнение для определения инкремента  $\Gamma$ . Его решение можно представить в виде

$$\Gamma = -\frac{2u_1u_2}{(u_1 + u_2)L} \delta \operatorname{ctg}(\delta), \quad \sin(\delta) = \pm \frac{\delta}{m}, \quad (8)$$

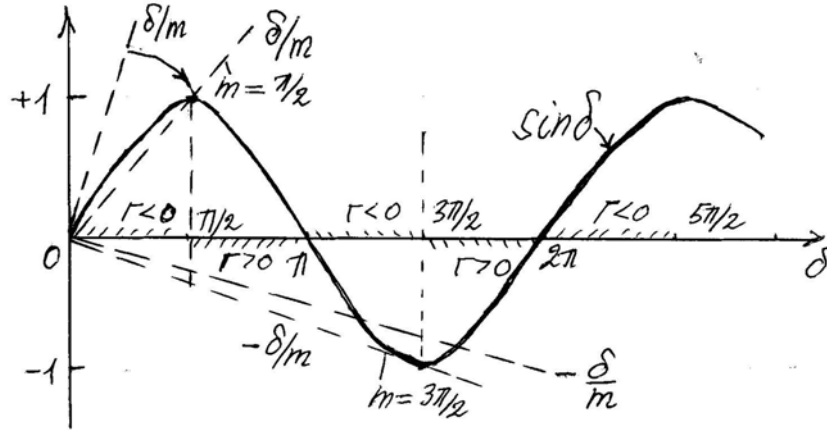


Рис. 2 Графическое определение действительных корней характеристического уравнения. На оси  $\delta$  показаны области с положительными и отрицательными значениями инкремента как функции  $\delta$

где  $m = \Gamma_0 L / \sqrt{u_1 u_2}$  и  $\delta$  – безразмерные параметры ( $\delta = \delta_0 L$  – см. формулу (7)). В первой формуле (8)  $\delta$  следует рассматривать как вспомогательный параметр, который определяется из трансцендентного уравнения (вторая формула в (8)) и зависит только от  $m$ .

Действительные корни трансцендентного уравнения для  $\delta$  можно найти графически (рис. 2). Достаточно рассмотреть интервал  $\delta > 0$ , поскольку  $\Gamma$  является четной функцией  $\delta$ . При малых  $m < 1$  отсутствует пересечение прямой  $F = \delta/m$  и синусоиды. Действительное решение для  $\delta$  появляется только при  $m > 1$ . Поскольку знак  $\Gamma$  совпадает со знаком функции  $[-\delta \operatorname{ctg}(\delta)]$  при увеличении  $m$  сначала получаем отрицательные значения инкремента. Они не должны рассматриваться согласно принятым при выводе ограничениям (см. выше). Решения с отрицательными  $\Gamma$  в искомом виде просто не существуют. Однако особого значения это обстоятельство иметь не может, поскольку основной интерес представляют нарастающие решения. Инкремент становится положительным после того, как прямая  $F = \delta/m$  пройдет через вершину первой полуволны синуса, т.е. при  $m > \pi/2$ . Это решение соответствует первой неустойчивой моде. Таким образом, неустойчивость впервые возникает при значениях параметра накачки

$$m = \frac{\Gamma_0 L}{\sqrt{u_1 u_2}} = \frac{\Gamma_0 L}{\sqrt{(V_1 - V_3)(V_3 - V_2)}} > \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

Поскольку теперь решение задачи полностью известно, можно проверить, что конфигурация поля будет такой же, как показанная на рис. 1. В частности, можно показать, что максимум интенсивностей волн на пороге возникновения неустойчивости совпадает с краями импульса накачки и смещается вовнутрь импульса накачки при переходе через этот порог.

Полученный критерий (9) имеет наглядный смысл. При фиксированных прочих параметрах системы неустойчивость появляется только при достаточно сильной амплитуде накачки ( $\Gamma_0$ ), поскольку необходимо скомпенсировать потери энергии на излучение волн за пределы импульса накачки («радиационные потери»). Таким образом, в отличие от параметрической неустойчивости однородных волн неустойчивость возникает при переходе

через пороговое значение поля накачки. Радиационные потери растут при увеличении скорости выноса волн за пределы импульса накачки. Поэтому увеличение  $u_{1,2}$  ужесточает требование к амплитуде накачки. Уменьшение длины импульса также усиливает условие на накачку, так как уменьшается усиление волн при их распространении внутри импульса накачки.

При дальнейшем росте  $m$  первый положительный корень появляется в точке пересечения отрицательной полуволны синуса с прямой  $F_2 = -\delta/m$  на рис. 2. Возникающая неустойчивая структура является второй неустойчивой модой. При достаточно большом  $m$  возможно существование нескольких неустойчивых мод. Асимптотическое (на больших временах) решение с произвольными начальными условиями представляет собой суперпозицию неустойчивых мод.

Аналогичные многомодовые решения были получены для гладких импульсов накачки. В частности, для  $a_3 = a_m / \text{ch}(x/L)$  изменяется только константа в правой части критерия неустойчивости (9) (замена  $\pi/2 \rightarrow 1/2$ ).

Если среда равновесна, генерация волн внутри импульса накачки ведет к ослаблению (распаду) самой накачки, после чего волны разбегаются в разные стороны от ослабленного импульса накачки, который уже не в состоянии их удержать. При взрывном взаимодействии волн (например, когда волна накачки имеет отрицательную энергию), развитие параметрической неустойчивости сопровождается нарастанием волны накачки, которая уже «не отпускает» две другие волны. В конечном счете возникает взрывной рост всех трех волн. По сути это механизм взрывной неустойчивости локализованных в пространстве волн, когда в начальный момент доминирует одна из них.

Задача о трехволновом взаимодействии в квадратичной среде с консервативной нелинейностью является точно интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (включая взрывную неустойчивость). Однако получение информации о решении, построенном в рамках метода обратной задачи, по существу, является отдельной задачей. Проведенный выше анализ достаточно прост и в то же время позволяет понять основные закономерности взаимодействия волновых пакетов.

### ***Стационарные волновые пучки и пространственно-временная аналогия.***

Решенная в предыдущем разделе задача о захвате слабых волн импульсом накачки во времени позволяет фактически без дополнительных усилий получить решение другой задачи – о стационарном параметрическом усилении волн в пространстве. Для этого достаточно воспользоваться пространственно-временной аналогией. Уравнения для взаимодействия плоских модулированных волн в случае неоднородной модуляции в заданном поле накачки имеют вид

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + (\vec{V}_3 \cdot \vec{\nabla}) a_3 = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla}) a_1 = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} + (\vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla}) a_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (10)$$

Вид линейного оператора в левых частях уравнений соответствует главному члену разложения закона дисперсии (в фуре-представлении). Отметим, что в этом случае условия резонанса должны выполняться для волновых векторов:  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3$ ,  $\omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2) = \omega(\vec{k}_3)$ . Направления волновых векторов и групповых волн в анизотропной среде могут не совпадать.

Теперь можно поставить задачу о стационарном параметрическом усилении слабых волн в пространстве при наличии пучка накачки с ограниченной апертурой. Для простоты ограничимся случаем двумерных волновых пучков, поля которых на границе промодулированы по одной поперечной координате  $y$  и развиваются вдоль оси  $x$ . Будем считать (это важно!), что направление оси  $x$  совпадает групповой скоростью волны накачки. Тогда получим уравнения стационарного взаимодействия двумерных пучков виде

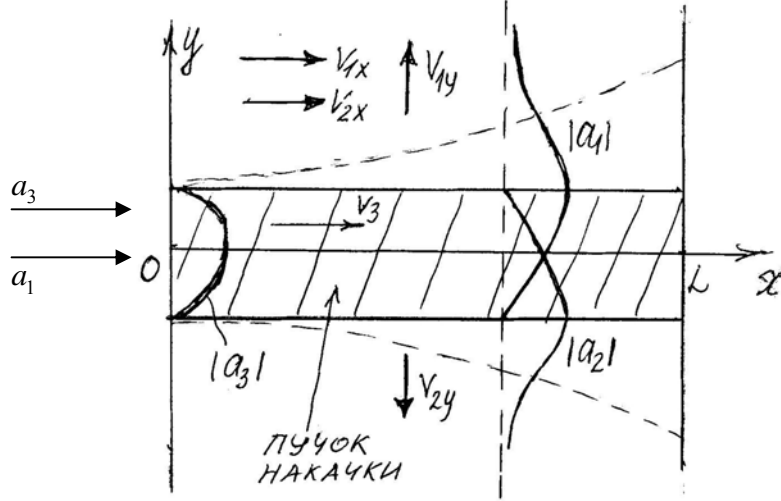


Рис. 3 Иллюстрация к эффекту пространственного захвата слабых волн пучком накачки. Пунктиром показана область локализации захваченных волн. Заштрихована область локализации пучка накачки

$$V_{3x} \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0, \quad V_{1x} \frac{\partial a_1}{\partial x} + V_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad V_{2x} \frac{\partial a_2}{\partial x} - |V_{2y}| \frac{\partial a_2}{\partial y} = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (11)$$

Чтобы получить полную аналогию с временной задачей, следует считать, что волны распространяются в одном направлении вглубь среды ( $V_{1x}, V_{2x} > 0$ ) и имеют различные направления группового распространения поперек пучка накачки  $V_{1y} > 0, V_{2y} = -|V_{2y}| < 0$ .

Как видно из первого уравнения (11), амплитудный профиль по  $y$  (апертура) пучка накачки не изменяется вдоль оси  $x$ , т.е.  $a_3 = a_3(y)$ . Область пучка накачки, возбуждаемого с границы  $x=0$ , заштрихована на рис. 3. Теперь уравнения задачи в точности сводятся к рассмотренным выше для параметрической неустойчивости во времени (после деления первого и второго уравнений на  $V_{1x}$  и  $V_{2x}$  и последующей замены  $x \rightarrow t, y \rightarrow x$ ). Ранее уже говорилось о том, что сведение временной задачи к пространственной и обратно называется методом пространственно-временной аналогии. Основываясь на изученном выше решении временной задачи, в данном случае можно говорить о пространственном захвате пучков слабых сигнальных волн пучком накачки, когда поля слабых волн локализируются внутри пучка накачки и выносят энергию за его пределами в поперечном направлении – см. рис. 3. На этом рисунке показаны профили волн. Поле в сечении  $x = const$  полностью аналогично распределению поля на рис. 1 в фиксированный момент времени. Поскольку поле усиливаемых волн локализуется внутри пучка накачки, этот эффект важен для реализации распределенного параметрического усилителя. Он дает возможность усиливать волну сигнала, локализованную внутри пучка накачки, даже если она имеет поперечную к нему составляющую групповой скорости. Параметрическое усиление возникает при превышении амплитуды импульса накачки над пороговым значением. Критерий усиления получается непосредственно из критерия (9), полученного выше для задачи о захвате волн во времени.

В заключение заметим, что эффект захвата волновых пакетов во времени возможен в случае двумерных и даже трехмерных импульсов накачки. Соответственно, возможен пространственный захват пучков с двумерной апертурой (цилиндрические пучки). При этом основной принцип остается прежним – волновое поле должно выноситься слабыми волнами в разных направлениях от импульса или пучка накачки по каждой из координатных осей.