

КОНКУРЕНЦИЯ ВОЛН В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Конкуренция однородных волн во времени или попутных волн в пространстве. Рассмотрим нерезонансное (энергетическое) взаимодействие двух волн. Как отмечалось ранее, результат взаимодействия в этом случае не зависит от фаз волн. В среде с диссипативной нелинейностью волны управляют усилением или затуханием друг друга и своим собственным через зависимость скорости роста от квадратов модулей комплексных амплитуд (интенсивностей). Будем считать, что обе волны находятся в области линейной неустойчивости среды ($\text{Im } \omega_{1,2} > 0$). Тогда после соответствующего нормирования амплитуд уравнения для интенсивностей $m_{1,2} \sim |a_{1,2}|^2$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} &= h_1 [1 - (m_1 + \rho_1 m_2)] m_1, \\ \frac{\partial m_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} &= h_2 [1 - (m_2 + \rho_2 m_1)] m_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $V_{1,2}$ – групповые скорости волн, $\rho_1, \rho_2 > 0$ – коэффициенты связи, $h_{1,2} > 0$ – инкременты линейной неустойчивости. Ранее такие уравнения были выведены для волн в линии с туннельными диодами (если вывести рабочую точку на середину падающего участка ВАХ, остается только кубичная нелинейность, либо резонансное взаимодействие исключено законом дисперсии). Подобные уравнения описывают взаимодействие волн в лазерах, в электронных приборах, использующих принцип бегущей волны, динамику популяций и даже реагентов в химических реакциях.

При одинаковых знаках групповых скоростей волн (попутные волны) эволюция $m_{1,2}$ во времени или их развитие в пространстве в направлении от источника протекают одинаково (стационарная задача сводится к временной, если разделить обе части уравнений на групповые скорости и сделать замену $x \leftrightarrow t$).

Рассмотрим для определенности эволюцию пространственно однородных волн во времени (конкуренцию двух достаточно разнесенных по волновому числу мод в резонаторе), полагая в (1) $\partial/\partial x \rightarrow 0$. Для решения задачи воспользуемся методом фазовой плоскости. Данная система уравнений имеет следующие состояния равновесия:

$$1) \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} m_1 = (1 - \rho_1)(1 - \rho_1 \rho_2)^{-1} \\ m_2 = (1 - \rho_2)(1 - \rho_1 \rho_2)^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

Четвертое состояние равновесия существует только в областях *I* и *IV* на рис. 1, поскольку только в этих областях оба значения $m_{1,2} \geq 0$ (в областях *II* и *III* $m_{1,2}$ имеют разные знаки независимо от того, по какую сторону расположена точка относительно кривой $\rho_2 = 1/\rho_1$).

Фазовые портреты системы (1) показаны на рис. 2. В случае слабой связи ($\rho_{1,2} < 1$) в зависимости от начальных условий реализуется режим генерации одной волны – см. рис. 2-*I*. Результат отбора волн определяется соотношением их начальных амплитуд. Когда связь сильная ($\rho_{1,2} > 1$), устойчивым оказывается режим с возбуждением обеих волн одновременно (рис. 2-*IV*). Таким образом, сильное взаимодействие как бы привязывает волны друг к другу и препятствует исчезновению одной из них. В случае асимметричной связи (рис. 2-*II, III*) независимо от начальных амплитуд устанавливается одноволновый режим, так как одна из волн всегда получает преимущество за счет более благоприятных

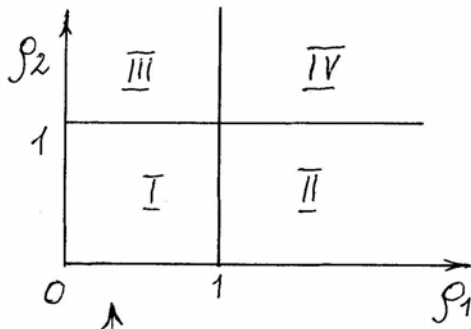


Рис. 1 Разбиение плоскости параметров системы (1) на области с качественно различным поведением фазовых траекторий

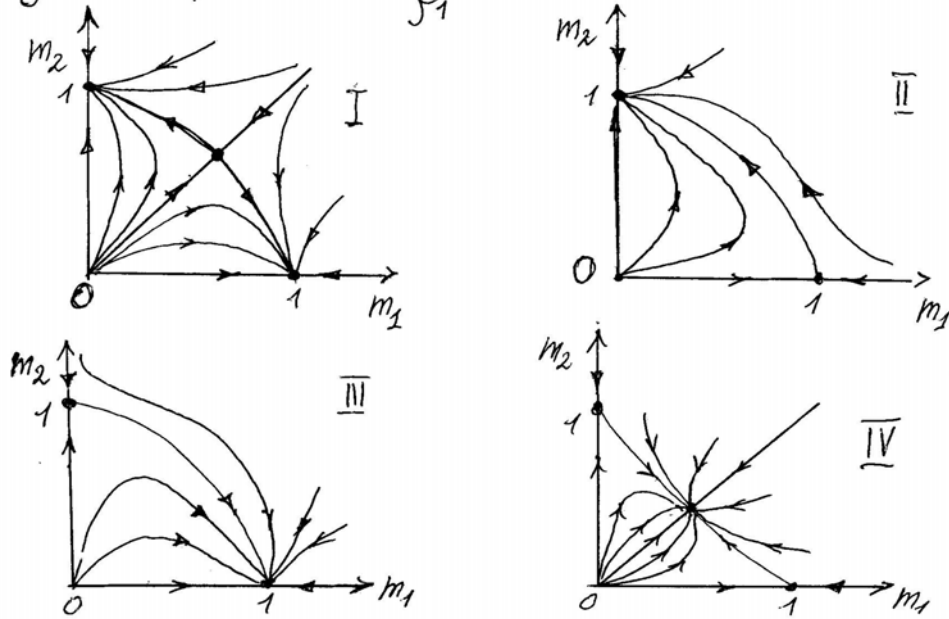


Рис. 2 Фазовые портреты системы (1) для различных областей параметров, показанных на рис. 1

условий для нарастания. Процесс взаимодействия волн, который приводит к их отбору (селекции) называется конкуренцией волн. При этом динамическая система уравнений для интенсивностей волн характеризуется множественностью стационарных режимов генерации (свойство мультистабильности).

Конкуренция встречных волн в резонаторе.

Конкуренции встречных волн соответствуют разные знаки групповых скоростей в (1). Пусть для определенности $V_1 > 0, V_2 < 0$ и ограничимся случаем взаимной связи:

$$\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho, \quad V_1 > 0, \quad V_2 = -|V_2| < 0 \quad (3)$$

(например, в длинной линии с нелинейной утечкой $\rho = 2$). Тогда в четвертом состоянии равновесия (2) получим $m_{1,2} = 1/(1 + \rho)$. Фазовые портреты системы (1) при $\partial/\partial t \rightarrow 0$ представлены на рис. 3. Отметим, что в переходном вырожденном случае ($\rho \rightarrow 1 - 0$) происходит слияние сепаратрис, показанных на рис. 3,б.

Как использовать полученные фазовые портреты для определения поля в резонаторе? Для этого необходимо найти решения, которые удовлетворяют граничным условиям. До-

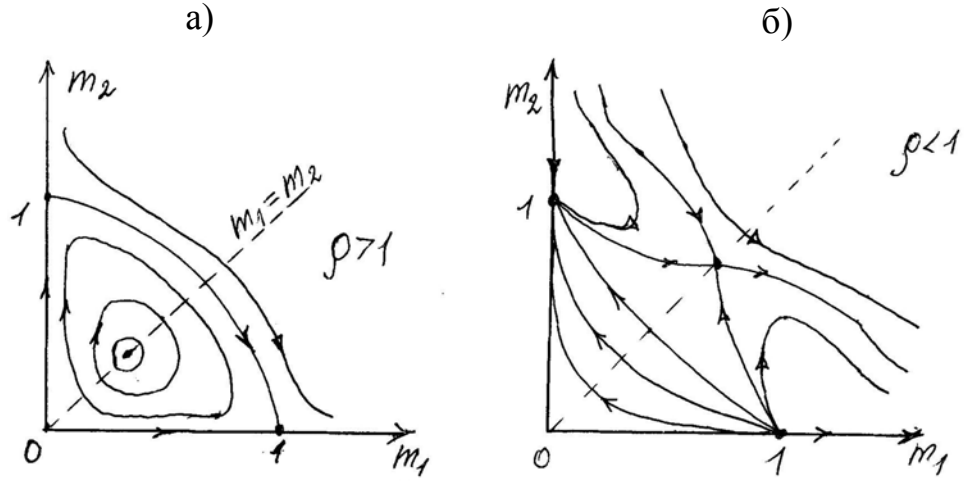


Рис. 3 Фазовые портреты стационарных распределений поля при конкуренции встречных волн в случае сильной (а) и слабой (б) связи

пустим, что на границах имеет место идеальное отражение. Тогда $m_1 = m_2$ при $x = 0$ и при $x = L$, где L – длина резонатора. Поэтому следует выбрать те фазовые траектории, которые начинаются и заканчиваются на биссектрисе $m_1 = m_2$. При слабой связи ($\rho < 1$) этому условию удовлетворяет только состояние равновесия типа седло (рис. 3б). При этом в резонаторе всегда устанавливается однородный режим генерации. При сильной связи ($\rho > 1$, рис. 3,а) возникает другая возможность, связанная с наличием замкнутых траекторий. Траектория должна начинаться и заканчиваться на биссектрисе и при движении по координата x должна изменяться на величину, равную длине резонатора L .

Линеаризуем систему для отклонений от состояния равновесия типа центр. Полагая $m_{1,2} = (1/(\rho + 1)) + \tilde{m}_{1,2}$ и рассматривая решения $\sim \exp(px)$, приходим к квадратному характеристическому уравнению для p , решения которого в частном случае $V_1 = |V_2| = V$, $h_1 = h_2 = h$ имеют вид

$$p = \pm (h/V) \sqrt{(1-\rho)/(1+\rho)} \quad (4)$$

При $\rho > 1$ p чисто мнимое и определяет период обращения траекторий вокруг центра в его малой окрестности. Поскольку период обращения возрастает при удалении от центра, можно указать необходимое условие реализации замкнутых траекторий в резонаторе. Оно состоит в том, что L должно быть больше половины минимального периода:

$$L > \frac{\pi V}{h} \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \quad (5)$$

Таким образом, мы пришли к нетривиальному результату: неоднородные распределения возможны только в достаточно длинном резонаторе. Чем длиннее резонатор, тем более неоднородное распределение поля может быть в нем реализовано. Это иллюстрируется на рис. 4 результатами численного решения уравнений (1) (на левой границе задавалось $m_1(0) = m_2(0) = 0.1$, а ограничение (5) на L принимает вид $L > 5.44$). Вычисления показывают, что граничное условие на правой границе $m_1 = m_2 = 0.48$ впервые выполняется при длине резонатора $L = 7.45$, которая действительно больше критического значения 5.44. В

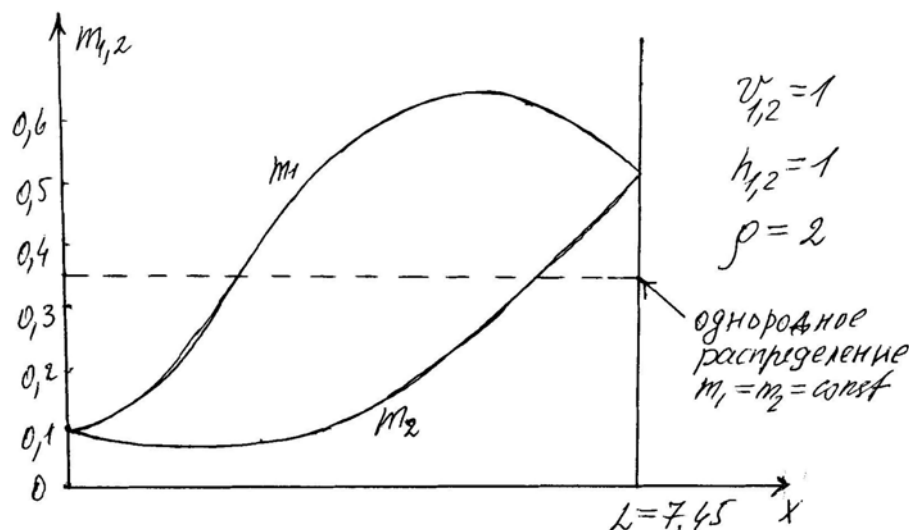


Рис. 4 Режим бегущей волны, возникающий в результате конкуренции двух встречных волн при сильной связи ($\rho > 1$)

представленном примере в основной части резонатора фактически реализуется режим бегущей волны (m_1 доминирует). В достаточно длинных резонаторах возможны также осциллирующие распределения поля, которым соответствует полное или многократное обращения фазовой траектории вокруг центра.

Возникает вопрос: не противоречит ли полученное решение тому, что среда изотропна, т.е. в ней нет выделенного направления распространения волн? Ответ состоит в том, что решению с преобладанием прямой бегущей волны можно поставить в соответствие симметричное распределение поля с преобладанием встречной волны, которому соответствует обращение вокруг центра по второй половине замкнутой фазовой траектории. Их реализация зависит от начальных условий

В случае кольцевого резонатора граничные условия принимают вид $m_1(0) = m_1(L)$, $m_2(0) = m_2(L)$. В данном случае следует выбрать фазовые траектории, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же точке на плоскости (m_1, m_2) и характеризуются приращением независимой переменной, равным длине резонатора. Таким образом, допускается произвольный фазовый сдвиг биений вдоль кольца.

Проведенный анализ легко обобщается для резонатора с двумя отражающими границами $x=0, L$. Граничные условия в этом случае имеют вид $m_1 = r_1 m_2$ при $x=0$ и $m_2 = r_2 m_1$ при $x=L$, где $r_{1,2} < 1$ – коэффициенты отражения по мощности. Они отображаются на фазовом портрете рис. За двумя прямыми, имеющими коэффициенты наклона $r_2 < 1$ и $1/r_1 > 1$. Соответственно следует выбирать фазовую траекторию, которая начинается на линии $m_1 = r_1 m_2$ и заканчивается на линии $m_2 = r_2 m_1$. Координата x на такой траектории также должна изменяться на величину L .