

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С ДИССИПАТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В слабо диссипативной среде потери энергии волн и связанное с ними затухание малы. До сих пор мы рассматривали только «линейные» потери энергии волн, которые проявляются в наличии $\text{Im } \omega \neq 0$. Однако возможен специфический вид потерь, при которых параметры потерь зависят от полей. Простейший пример в электродинамике – зависимость проводимости от электрического поля. Практический интерес представляет ситуация, когда нелинейные потери могут компенсироваться усилением (активная среда).

Рассмотрим в качестве примера активной среды с диссипативной нелинейностью распределенную LC – линию, нагруженную туннельными диодами (ТД), на которые подано постоянное напряжение смещения U_0 . На рис. 1 показана электрическая схема звена такой линии с постоянными емкостью и индуктивностью и вольт–амперная характеристика (ВАХ) ТД $J_d(U)$. Уравнения Кирхгофа запишем для отклонений тока и напряжения от значений в рабочей точке

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \tilde{J}_d(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (1)$$

Исключая из (1) ток I , получим одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\varepsilon}{C} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{J}_d(u) \quad \left(V_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \quad (2)$$

где $u = U - U_0$ – отклонение напряжения от значения в рабочей точке, $\tilde{J}_d(u) = J_d(U_0 + u) - J_d(U_0) = gu - bu^2 + \beta u^3$ – отклонение тока от значения в рабочей точке

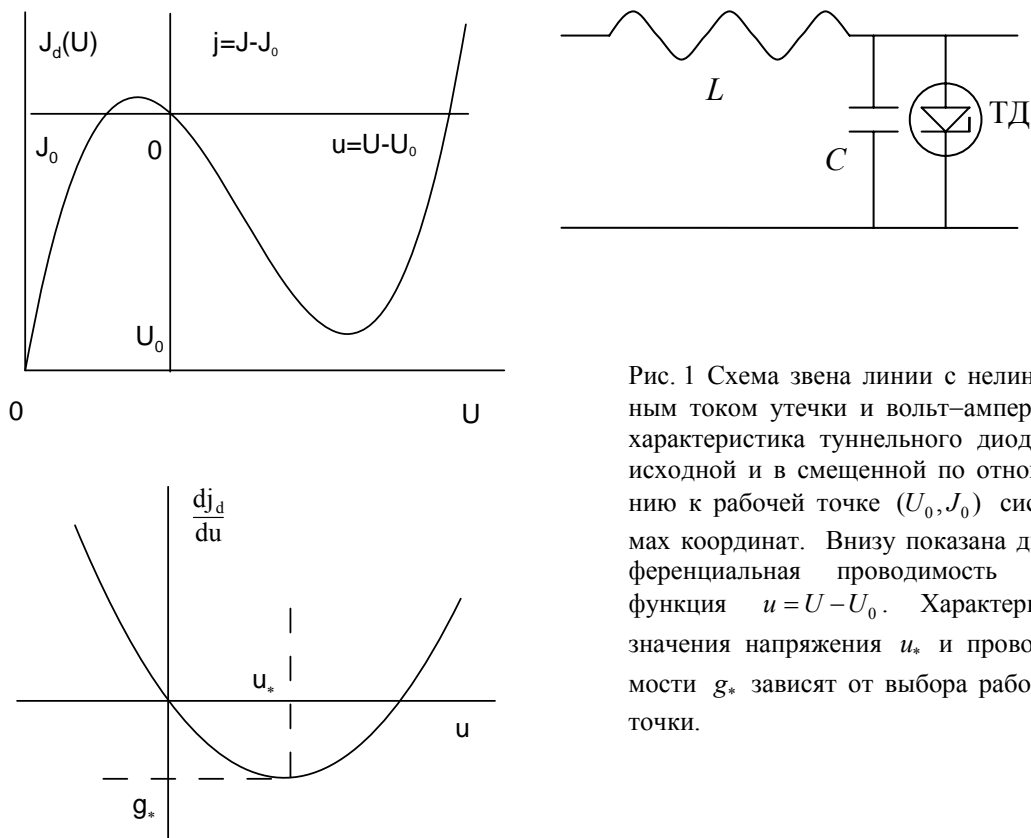


Рис. 1 Схема звена линии с нелинейным током утечки и вольт–амперная характеристика туннельного диода в исходной и в смещенной по отношению к рабочей точке (U_0, J_0) системах координат. Внизу показана дифференциальная проводимость как функция $u = U - U_0$. Характерные значения напряжения u_* и проводимости g_* зависят от выбора рабочей точки.

ке. Постоянное напряжение смещения U_0 определяет положение рабочей точки на ВАХ. При качественном исследовании обычно ограничиваются аппроксимацией ВАХ ТД полиномом третьей степени, которая приведена выше ($b, \beta > 0$). При $g > 0$ и $g < 0$ рабочая точка находится соответственно в области положительной и отрицательной дифференциальной проводимости (на рис. 1 показан случай отрицательной дифференциальной проводимости). На этом же рисунке приведена также зависимость дифференциальной проводимости от напряжения, построенная при $g = 0$ (рабочая точка на вершине ВАХ). На ней отмечены «характерные» значения напряжения $u_* = b/(3\beta)$ и проводимости $g_* = -b^2/(3\beta)$. В каком смысле эти значения можно считать характерными? Ответ в том, что интересующий нас диапазон изменения u – величина порядка u_* и соответственно проводимость сравнима с g_* .

Когда влияние нелинейной проводимости на распространение волн в линии становится малым, т.е. среда является слабо диссипативной? Ясно, что ток утечки в туннельный диод должен быть мал по сравнению с реактивной составляющей тока, ответвляющейся в реактивную проводимость $|Y| = \omega C(\omega)$. Это условие принимает вид $g_*/\omega C \sim \varepsilon \ll 1$. Фактически это малый параметр задачи, который можно выделить в уравнениях явно путем перехода к нормированным переменным (соответствующие нормировки будут рассмотрены позднее). Пока же мы не будем выделять этот параметр явно и ограничиваемся вводом символического (фиктивного) малого параметра ε при токе утечки, который указывает на малость данного члена уравнений. Подчеркнем, что введенный малый параметр не связан непосредственно с малой величиной возмущений (как это было до сих пор), поэтому нелинейная проводимость может включать в себя сравнимые по порядку величин квадратичную и кубичную нелинейности одновременно.

Свойства трехволновых резонансных взаимодействий в средах с квадратичной диссипативной нелинейностью. Для упрощения анализа рассмотрим вырожденное трехволновое взаимодействие – резонансное взаимодействие волны со второй гармоникой:

$$2k_1 = k_2, \quad 2\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega \quad (3)$$

где $\omega_j = \omega(k_j)$ – частоты собственных волн. Взаимодействие волн (3) можно реализовать в линии с высокочастотной дисперсией, которая может определяться дискретностью элементов линии или включением емкости параллельно индуктивности в рамках распределенной модели. Условия резонанса показаны на рис. 2. Малой расстройкой от резонанса

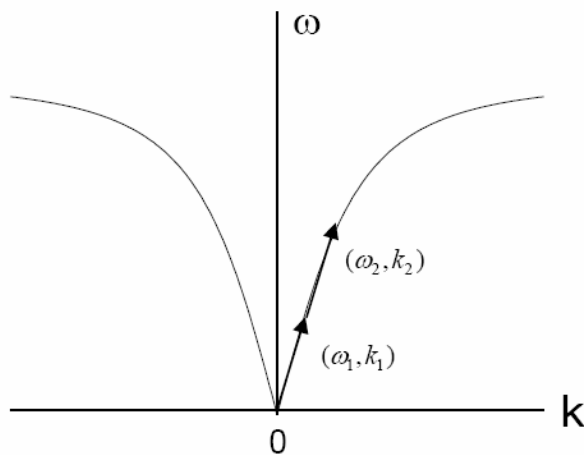


Рис. 2 Условия резонанса между волной (ω_1, k_1) и ее второй гармоникой в LC-линии с дисперсией в области высоких частот

$\Delta\omega = 2\omega_1 - \omega_2 > 0$, которая неизбежно появляется в данном случае, будем пренебрегать. В то же время нарастание третьей гармоники $(3k_1, 3\omega_1)$ отсутствует, так как при достаточно больших ω_1 ее частота сильно отличается от частоты собственной волны $\omega(3k_1)$. Поэтому условия резонанса для ее возбуждения не выполнены, т.е. $\omega_1 + \omega_2 \neq \omega(k_3)$, где $k_3 = k_1 + k_2$. Фактически в интервале от нуля до $2k_1$ можно полностью пренебречь дисперсией, т.е. положить в уравнениях диспергирующей линии $L(\omega) = L = const$, $C(\omega) = C = const$. Это позволяет применять асимптотический метод непосредственно к уравнению (2). Кроме того, в укороченных уравнениях сделаем нормировки через характерные значения, указанные выше

$$a_{jнов.} = \frac{a_j}{u_*} = \frac{3\beta}{b} a_j, \quad \tau = \frac{b^2 t}{6C\beta}. \quad (4)$$

Отметим, что с помощью аналогичных нормировок в исходных уравнениях можно выделить в них малый параметр в явном виде. Опуская индекс «нов.», получим укороченные уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= 2a_1^* a_2 - (|a_1|^2 + 2|a_2|^2)a_1 + \nu a_1, \\ \frac{da_2}{dt} &= a_1^2 - (|a_2|^2 + 2|a_1|^2)a_2 + \nu a_2, \end{aligned} \quad \left(\nu = -\frac{3\beta g}{b^2} \right) \quad (5)$$

Кроме членов резонансной связи гармоник в эти уравнения вошли члены нерезонансного взаимодействия и самовоздействия волн, которое не зависит от фаз и зависят только от интенсивностей волн (см. п.4.6).

Если $\nu = 0$ и амплитуды малы, то кубичными членами можно пренебречь. Тогда получаем уравнения взрывного взаимодействия, рассмотренные в п.4.5. Таким образом, при нелинейной утечке, квадратичной по полю, *возникает взрывная неустойчивость волн положительной энергии*. Причина состоит в том, что квадратичный участок ВАХ (см. рис. 1) всегда имеет область с ОДУ, где поле волн черпает энергию из источника, выводящего напряжение смещения в окрестность квадратичного участка ВАХ.

Чтобы учесть линейное затухание и кубичные потери. Ограничимся частным классом решений, когда все амплитуды вещественны (фазы волн тождественно равны нулю). Тогда уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= 2A_1 A_2 - (A_1^2 + 2A_2^2)A_1 + \nu A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} &= A_1^2 - (A_2^2 + 2A_1^2)A_2 + \nu A_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Эту систему второго порядка можно исследовать на фазовой плоскости. Наглядный вид имеет зависимость стационарной амплитуды от инкремента линейной неустойчивости ν (рис. 3,а). В области $\nu < 0$ (когда волны затухают – рабочая точка левее максимума на ВАХ диода) имеем два состояния равновесия. Меньшее значение равновесной амплитуды соответствует порогу возбуждения, большее – устойчивому состоянию равновесия. При больших по величине отрицательных ν состояния равновесия отсутствуют, т.е. неустойчивость в системе подавлена полностью. Фазовая плоскость для области жесткого возбуждения $-0.232 < \nu < 0$ показана на рис. 3,б. На этой плоскости «вертикальная» сепаратриса седла отделяет область затухания возмущений от области их нарастания из-за взрывной неустойчивости. Взрывная неустойчивость ограничивается кубичной нелинейностью, которая дает состояние равновесия типа устойчивый узел. Фазовая плоскость в области линейной неустойчивости ($\nu > 0$) отличается от приведенной на рис. 3б тем, что на ней седло находится в начале координат (поглощает устойчивый узел). При этом в системе скачкообразно возникает генерация волн с конечной амплитудой.

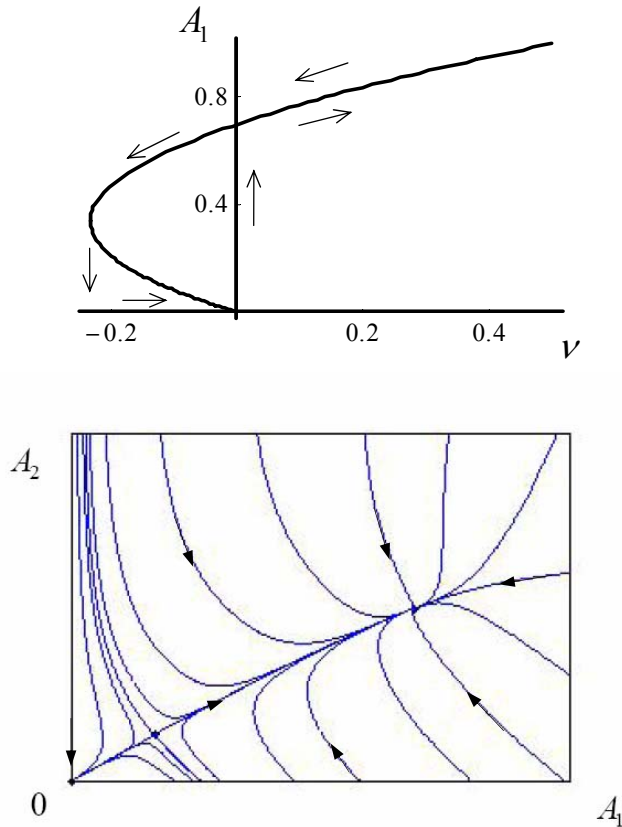


Рис. 3. (а) – Диаграмма стационарных значений амплитуды A_1 при взрывной неустойчивости волн положительной энергии в LC –линии с нелинейной утечкой (вырожденное трехволновое взаимодействие). Стрелками показано направление изменения стационарной амплитуды при увеличении и последующем уменьшении параметра ν (петля гистерезиса); (б) – Фазовая плоскость в случае жесткого (докритического) возбуждения волн ($\nu < 0$)

Таким образом, *взрывная неустойчивость* при резонансном взаимодействии волн *может приводить к их жесткому возбуждению*. Если искать аналоги в теории колебаний сосредоточенных систем, можно привести пример генератора с жестким возбуждением, который описывается уравнением вида

$$\frac{dA}{dt} = \alpha_1 A + \alpha_3 A^3 - \alpha_5 A^5 \quad (7)$$

Жесткое возбуждение возникает при $\alpha_{3,5} > 0$, $\alpha_1 < 0$ и достаточно малом $|\alpha_1|/\alpha_3$. Если амплитуды малы ($A^2 \ll \alpha_3/\alpha_5$), последним членом можно пренебречь и при $\alpha_1 = 0$ для $I = A^2$ получим знакомое уравнение взрывной неустойчивости. Член $\sim A^5$ в данном случае определяет ограничение «взрыва» и установление стационарной амплитуды. Диаграмма стационарных состояний качественно имеет такой же вид как рассмотренный выше (рис. 3а). Порог возбуждения по амплитуде определяется неустойчивым состоянием равновесия. Таким образом, при квадратичной диссипативной нелинейности качественно картина такая же как для модели генератора с жестким возбуждением колебаний. Отличие лишь в механизме подкачки энергии. В рассмотренной выше волновой задаче энергия подводится к волнам благодаря их резонансной связи через квадратичную нелинейность диссипативного типа. Подчеркнем, что ограничение взрывной неустойчивости в данном случае происходит в пределах применимости метода малого параметра, то есть при медленно меняющихся амплитудах волн.

Приведенный пример – простейший случай диссипативной нелинейности. В более сложных изначально не просто определить характер нелинейности. Собственно расчет коэффициентов связи волн и позволяет это сделать. Важный пример взрывной неустойчивости, возникающей при трехволновом взаимодействии, – волны Толлмина–Шлихтига, нарастающие в при переходе от ламинарного течения к турбулентному в течениях типа пограничного слоя.