

ЧЕТЫРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СРЕДАХ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Для пояснения существа вопроса, рассмотрим модель консервативной нелинейной среды в виде LC – линии с нелинейной емкостью, которая пропорциональна квадрату напряжения. Для этого в телеграфных уравнениях (1) из п.4.2 положим $C_{NL} = C_0 + \alpha u^2$. Тогда уравнение (4) из п.4.2 принимает вид

$$D(\hat{\omega}, \hat{k})u = -\varepsilon i \hat{\omega} f_1 \quad \left(f_1 = \frac{1}{2} \alpha u^3 \right). \quad (1)$$

Ясно, что в данном случае в главную часть решения следует включить четыре волны, поскольку суммы показателей экспонент будут содержать три частоты и три волновых числа:

$$f_1 \sim u^3 = 6a_1 a_2 a_3 e^{i(k_1+k_2+k_3)x-i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t} + 6a_1 a_2^* a_3 e^{i(k_1+k_2-k_3)x-i(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t} + \\ + 3a_1 a_1^* a_1 e^{i(k_1-k_1+k_1)x-i(\omega_1-\omega_1+\omega_1)t} + 6a_1 a_2^* a_2 e^{i(k_1+k_2-k_2)x-i(\omega_1+\omega_2-\omega_2)t} + \dots, \quad (2)$$

где $\omega_j = \omega(k_j)$ – частоты собственных волн среды. Как и раньше, считаем частоты волн, входящих в главную часть решения, положительными (напомним, что этому условию всегда можно удовлетворить). Анализируя показатели экспонент в правой части (2), можно выделить два типа четырехволновых резонансов

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = k_4 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \end{cases}, \quad (3)$$

При положительных частотах они не сводятся один к другому с помощью простой замены обозначений (перенумерации волн). Соответствующие диаграммы распадов–слияний квазичастиц показаны на рис. 1. Для каждой из них нетрудно написать амплитудные уравнения и соотношения Мэнли–Роу. В отличие от трехволновых взаимодействий, когда в одномерной задаче для одной выбранной волны можно подобрать одну (или несколько) пар резонансных волн, в случае четырехволновых взаимодействий уже в одномерном случае для заданной волны можно найти континуум волн, удовлетворяющих условиям четырехволнового резонанса. В этом нетрудно убедиться с помощью векторных диаграмм, отображающих условия резонанса (см. п.4.1). Бывают ситуации, когда даже в двумерной задаче трехволновые резонансы отсутствуют (например, для гравитационных волн на воде). В этом случае говорят, что среда имеет нераспадные спектры волн. Тогда основными становятся четырехволновые резонансные взаимодействия.

Как видно из разложения (2), кубичная нелинейность создает комбинационные «нелинейные источники» с показателями экспонент, совпадающими с показателем одной из

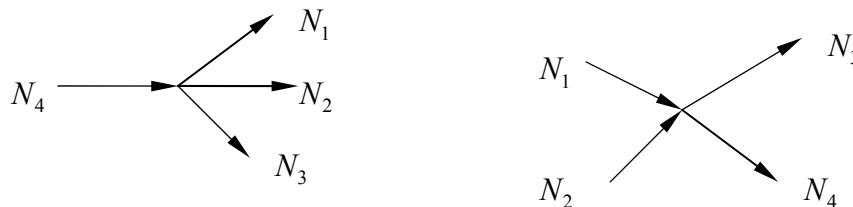


Рис. 1 Диаграммы четырехволновых взаимодействий в среде с кубичной нелинейностью

волн тождественно. Видно, в частности, что вторая и третья экспоненты переходят соответственно в $\exp(ik_1x - i\omega_1t)$, т.е. дают нелинейный источник, резонансный с первой волной. Условия резонанса в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} k_1 + k_1 - k_1 = k_1 \\ \omega_1 + \omega_1 - \omega_1 = \omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 + k_2 - k_2 = k_1 \\ \omega_1 + \omega_2 - \omega_2 = \omega_1 \end{cases} \quad (4)$$

и выполнены тождественно (при любых $\omega_{1,2}, k_{1,2}$). Такие взаимодействия волн называются нерезонансными или «несинхронными». На «квантовом» языке первому из условий (4) соответствует процесс слияния двух квантов волны (ω_1, k_1) с рождением двух новых квантов этой же волны (см. вторую диаграмму на рис. 1), а второе условие (4) можно интерпретировать как слияние квантов волн (ω_1, k_1) и (ω_2, k_2) с рождением двух квантов этих же волн.

Очевидно, что процесс, определяемый первым условием (4), может протекать при наличии в среде всего одной волны. При этом для комплексной амплитуды этой волны получим уравнение вида

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = -iT|a_1|^2 a_1 \quad (5)$$

В данном случае говорят о *самовоздействии* волны a_1 . Коэффициент T в общем случае комплексный. Однако в консервативной среде он должен быть вещественным в силу закона сохранения энергии. Действительно, умножая обе части (5) на a_1^* и складывая с комплексно сопряженным, получим

$$\frac{\partial |a_1|^2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial |a_1|^2}{\partial x} = 2(\text{Im} T)|a_1|^4 \quad (6)$$

Поскольку энергия пропорциональна $|a_1|^2$, закон сохранения энергии выполняется только при $\text{Im} T = 0$.

При вещественном T правая часть в (5) определяет нелинейную поправку к частоте волны. Чтобы понять это, выясним физический смысл величины $\Gamma = a_1^{-1} \partial a_1 / \partial t$. Заметим, что комплексное поле в виде монохроматической волны с переменной амплитудой можно записать следующем виде

$$\begin{aligned} u &= a(x, t) \exp(ikx - i\omega t) = \exp(ikx - i\omega t + \ln a) = \\ &= \exp \left[ikx - i \int \left(\omega + \frac{\partial \ln a}{\partial t} \right) dt \right] = \exp \left[ikx - i \int \left(\omega + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) dt \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Произвольную функцию x , возникающую при интегрировании по времени, из условия сшивки с исходной формулой полагаем равной нулю. Теперь видно, что $\text{Re} \Gamma$ и величина $\text{Im} \Gamma$ определяют текущие значения поправки к частоте волны и ее инкремент (мнимую часть частоты) соответственно. Таким образом, при вещественном T из (5) имеем нелинейную добавку к частоте волны $\delta\omega_{NL} = T|a_1|^2$. Иногда ее называют нелинейной дисперсией.

Будем искать решение (5) с начальными условиями $a_1(0, x) = a_{10}(x)$. Оно уравнение легко решается с помощью перехода к новым переменным $x' = x - v_1 t$, $t' = t$, что соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью волны. Преобразование производных имеет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t'} \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{=1} + \frac{\partial a}{\partial x'} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{v_1}, \quad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t'} \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial a}{\partial x'} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} \quad (8)$$

В результате (5) сводится к уравнению в обыкновенных производных

$$\frac{\partial a_1}{\partial t'} = -iT |a_1|^2 a_1, \quad (9)$$

в котором неизвестная зависит от x' , как от параметра.

При вещественном T для a_1 как функции новых переменных из (9) следует, что $|a_1(t', x')|^2$ не зависит от t' (см. аналогично (6)). Тогда (9) сводится к линейному уравнению с постоянным коэффициентом и его решение можно записать в виде

$$a_1 = a_{10}(x') \exp(-iT |a_{10}(x')|^2 t') = a_{10}(x - v_1 t) \exp(-iT |a_{10}(x - v_1 t)|^2 t) \quad (10)$$

Согласно (10) точки начального профиля переносятся с групповой скоростью, однако для них возникают различные нелинейные добавки к частоте.

ЧЕТЫРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН В КВАДРАТИЧНОЙ СРЕДЕ

В данном разделе мы не будем проводить детального рассмотрения и ограничимся пояснением существа вопроса. Допустим, что в квадратичной среде возбуждена одна волна. При использовании асимптотического метода для простейшей квадратичной нелинейности имеем уравнение для первой добавки

$$Lu^{(1)} \sim u^{(0)} u^{(0)} = a_1^2 e^{i(2k_1)x - i(2\omega_1)t} + k.c. + \dots \quad (11)$$

Оно содержит в правой части нелинейный источник в виде второй гармоники исходной волны. Допустим, что эта вторая гармоника не является собственной волной среды, т.е. условия вырожденного трехволнового резонанса не выполняются. Если ввести обозначения $k' = 2k_1$, $\omega' = 2\omega_1$, отсутствие резонанса выражается условием $\omega' \neq \omega(k')$ или, что то же самое, $D(\omega', k') \neq 0$ (отличие от нуля велико по сравнению с ε). В этом случае первая добавка на второй гармонике остается малой и находится явно. Для построения укороченных уравнений необходимо рассматривать члены порядка ε^2 . Уравнение для второй добавки содержит в правой части член порядка ε^2 разложения нелинейности:

$$Lu^{(2)} \sim 2u^{(1)}u^{(0)} = 2|a_1|^2 a_1 e^{ik_1x - i\omega_1 t} + k.c. \quad (12)$$

Видно, что нелинейный источник оказывается резонансным с исходной волной, т.е. приводит к накапливающимся изменениям ее амплитуды. Это приводит к появлению следующего слагаемого в выражении для производной по времени

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} \sim \varepsilon^2 |a_1|^2 a_1 \quad (13)$$

На квантовом языке сказанное можно интерпретировать последовательность двух процессов, протекающих одновременно. 1) Рождение виртуальной второй гармоники (ω', k') , которая не является собственной и поэтому остается на слабом уровне (отсюда название – виртуальная). 2) Взаимодействие второй гармоники с основной волной, для которого условия трехволнового резонанса выполнены тождественно: $k' - k_1 = k_1$, $\omega' - \omega_1 = \omega_1$. Эта последовательность процессов равнозначна одному вырожденному четырехволновому взаимодействию вида $k_1 + k_1 - k_1 = k_1$, $\omega_1 + \omega_1 - \omega_1 = \omega_1$, которое полностью аналогично самовоздействию волны в кубичной среде.

Таким образом, в квадратичной среде во втором приближении возможно самовоздействие волн. Легко видеть, что эти рассуждения обобщаются на произвольные четырехволновые процессы. Может оказаться, что трехволновые резонансы в квадратичной среде вообще отсутствуют (реализуется «нераспадный» спектр волн). Тогда во втором приближении возможны четырехволновые взаимодействия, которые полностью аналогичны таковым в среде с кубичной нелинейностью. Мы приходим к важному выводу, что в квадратичной среде возникают эффекты кубичной нелинейности, которые проявляются во

втором порядке асимптотического метода по малому параметру. Рассмотренное выше самовоздействие волн – частный случай эффективной кубической нелинейности.

Еще один новый эффект в квадратичной среде – рождение средних полей второго порядка по амплитуде. Это аналог эффекта детектирования, известного в радиотехнике. Например для линии с нелинейной емкостью имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial x} &= -C_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial u^2}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial t},\end{aligned}\quad (14)$$

Разделим медленно меняющиеся средние и осциллирующие (с нулевым средним) составляющие поля:

$$u = \varepsilon u_- + \varepsilon^2 \bar{u}, \quad I = \varepsilon I_- + \varepsilon^2 \bar{I} \quad (15)$$

Малый параметр ε при осциллирующей составляющей введен для того, чтобы показать ее малость в явном виде. Коэффициент ε^2 при втором члене – результат предварительной оценки его порядка. Сохраняя члены одного порядка и учитывая, что средние зависят только от медленных координаты и времени, получим

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \chi} = -C_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} = -L \frac{\partial \bar{I}}{\partial \tau}, \quad (16)$$

Поскольку $\bar{u}^2 = 2|a|^2$, из уравнений (16) следует, что квадратичная нелинейность порождает *средние поля второго порядка по амплитуде*. Сдвиг напряжения \bar{u} приводит к изменению емкости (см. рис. 2, п.4.2). В общем случае можно сказать, что детектирование ведет к изменению *средних параметров* среды или средних полей. Средние поля могут давать вклад в уравнения второго приближения для амплитуды волны, поскольку в уравнении для второй добавки нелинейность дает новое резонансное слагаемое:

$$Lu^{(2)} \sim \bar{u} u_- = \bar{u} a_1 e^{ik_1 x - i\omega_1 t} + k.c., \quad (17)$$

Для простоты ограничимся ситуацией, когда волна (ω_1, k_1) находится в области слабой дисперсии, где $\omega''_{kk} \approx 0$. Тогда в учетом (13) во втором приближении получим уравнение

$$\frac{\partial a_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial \chi} = \varepsilon \left[iT_1 |a_1|^2 a_1 + iT_2 \bar{u}(\tau, \chi) a_1 \right] \quad (18)$$

где $T_{1,2}$ – вещественные постоянные коэффициенты. В общем случае возникает система связанных уравнений (18), (16) для амплитуды волны и средних полей. Случай $\omega''_{kk} \neq 0$ и связанные с ним эффекты будут рассмотрены в последующих лекциях.

Таким образом, в квадратичной среде наряду с самовоздействием через вторую гармонику возможно самовоздействие волн, обусловленное генерацией ими средних полей второго порядка по амплитуде. Подчеркнем, что сказанное здесь имело характер пояснений существа вопроса, а последовательное описание рассмотренных эффектов можно получить в рамках асимптотических методов.