

СТАЦИОНАРНОЕ ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если ставится задача с граничными условиями и рассматривается установившийся во времени процесс ($\partial/\partial t \rightarrow 0$), уравнения трехволнового взаимодействия примут вид

$$v_{1,2}a'_{1,2} = \sigma_{1,2}a_{2,1}^*a_3, \quad v_3a'_3 = \sigma_3a_1a_2 \quad (1)$$

(штрихи означают производные по x). При одинаковых знаках групповых скоростей, когда волны вводятся в среду с одной и той же границы, задача об изменении амплитуд волн в пространстве формально полностью совпадает с рассмотренной ранее задачей Коши об эволюции во времени. В этом можно убедиться с помощью замены $\bar{\sigma}_j = \sigma_j/v_j$, $x \rightarrow t$. Отсюда следует, что с ростом x либо амплитуды волн $a_{1,2}$ одновременно нарастают при уменьшении a_3 , либо наоборот. Инкремент параметрической неустойчивости в заданном поле высокочастотной волны равен $\Gamma_0 = \sqrt{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2}|a_3|$. Такая взаимозаменяемость пространственной и временной задач называется пространственно-временной аналогией.

В общем случае произвольных знаков групповых скоростей имеем соотношения Мэнли–Роу для величин, которые можно интерпретировать как потоки квазичастиц:

$$v_1N_1 + v_3N_3 = C_1, \quad v_2N_2 + v_3N_3 = C_2, \quad v_1N_2 - v_2N_2 = C_3. \quad (2)$$

Сравнение (2) с соотношениями Мэнли-Роу для временной задачи приводит к выводу, что знаки групповых скоростей играют ту же роль, что знаки энергии волн. Однако это утверждение верно лишь отчасти.

Рассмотрим конкретную реализацию трехволнового процесса с разными знаками групповых скоростей волн – вынужденное рассеяние Мандельштамма-Бриллюэна света на звуке в газе (ВРМБ). Условия резонанса для такого трехволнового взаимодействия, показаны на рис. 1а (они уже обсуждались на предыдущих лекциях). Наклоны

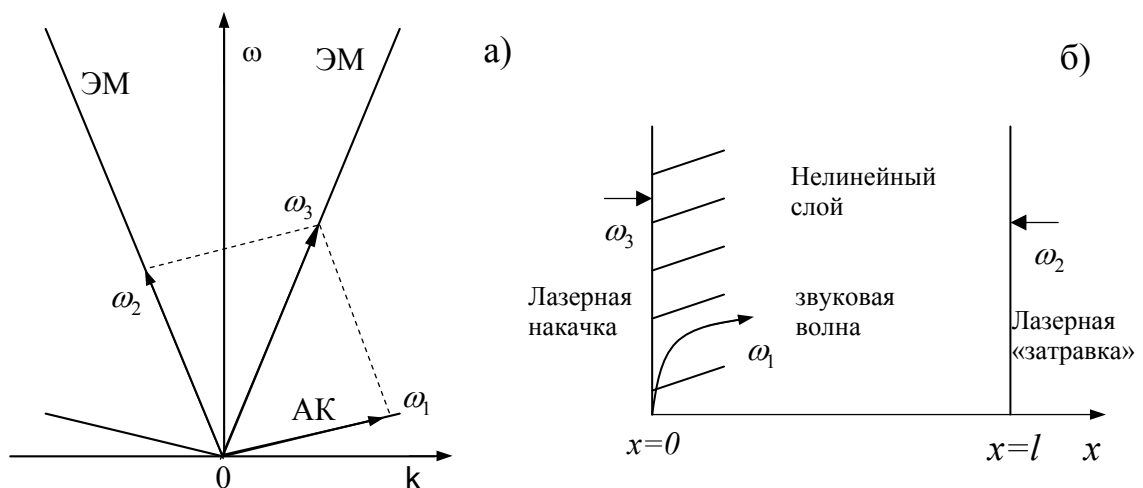


Рис. 1 Графическое изображение условий резонанса (а) и иллюстрация к постановке граничных условий (б) для вынужденного рассеяния Мандельштамма-Бриллюэна.

дисперсионных ветвей света и звука выбраны без соблюдения масштаба. Постановка граничных условий иллюстрируется схемой на рис. 1б. В среде имеется два типа волн – электромагнитные и акустические. На границу $x=0$ подается интенсивная электромагнитная волна на частоте ω_3 , а на границу $x=l$ – слабая (сигнальная) электромагнитная волна ω_2 . Эти волны иногда называют, соответственно, «стоксовой» и «антистоксовой». При выполнении условий резонанса рождается акустическая волна ω_1 , которая нарастает «из нуля» от границы $x=0$. В данном случае групповые скорости волн имеют различные знаки: $v_{1,3} > 0$ и $v_2 < 0$.

Нелинейное взаимодействие между акустической и электромагнитными волнами возникает благодаря электрострикционному эффекту. С одной стороны, диэлектрическая проницаемость среды зависит от энтропии и плотности вещества. При малых возмущениях плотности можно ограничиться главным членом разложения этой зависимости в ряд Тейлора:

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_S}_{\gamma_0} \tilde{\rho} + \dots \quad (3)$$

где $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_0)$ – возмущения плотности; производная по ρ берется в точке ρ_0 при постоянной энтропии (индекс «S»). С другой стороны, термодинамическое уравнение состояния среды сводится к зависимости давления p от плотности, энтропии и интенсивности электромагнитного поля. При малых возмущениях имеем разложение

$$p \approx p_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S}_{c_s^2} (\rho - \rho_0) - \frac{1}{8\pi} \gamma_0 |\vec{E}|^2, \quad (4)$$

где c_s – адиабатическая скорость звука. Феноменологические зависимости (3), (4) приводят к уравнениям движения с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\gamma_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho} E) \equiv f_1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\rho} u) \equiv f_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \underbrace{-u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c_s^2}{\rho_0} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \frac{\gamma_0}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial x}}_{f_3} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

где c – скорость света в вакууме, $E = E_y$, $H = H_z$, $u = (\vec{v})_x$ – возмущения продольной скорости в газе, ν – коэффициент кинематической вязкости. При выводе уравнения (7) с учетом малости возмущений плотности ($\tilde{\rho} \ll \rho_0$) сделана замена $1/(\rho_0 + \tilde{\rho}) \approx (1/\rho_0)(1 - \tilde{\rho}/\rho_0)$. Потери для акустических волн в газе в дальнейшем учитывать не будем ($\nu \rightarrow 0$), сосредоточив все внимание на нелинейных эффектах.

Введем формально малый параметр μ , чтобы показать в явном виде малую величину колебаний всех величин: $E = \mu E_{нов.}$, $H = \mu H_{нов.}$, $u = \mu u_{нов.}$, $\tilde{\rho} = \mu \tilde{\rho}_{нов.}$. Опуская индекс «нов.» и производя очевидные преобразования уравнений (5)–(7), получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\mu \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \left(\frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \mu f_2, \quad (10)$$

Система (8), (9) имеет независимые линейные части, соответствующие электромагнитным и акустическим волнам. Подставляя в линеаризованные ($\mu = 0$) уравнения (8)–(10) решение $\sim \exp(ikx - i\omega t)$, получим хорошо известные дисперсионные уравнения для электромагнитных и акустических волн:

$$\omega^2 - k^2 v_0^2 = 0, \quad \omega^2 - k^2 c_s^2 = 0 \quad (v_0 = c / \sqrt{\varepsilon_0}). \quad (11)$$

Из (11), в частности, следует, что введенная в (4) постоянная c_s действительно есть скорость звука. Напомним, что скорость звука на несколько порядков меньше скорости света.

Решение (8)–(10) ищется в виде

$$\begin{aligned} u &= a_1 e^{i\mathcal{G}_1} + k.c. + \mu u^{(1)} + \dots, \\ \tilde{\rho} &= a_1 \frac{\rho_0}{c_s} e^{i\mathcal{G}_1} + k.c. + \mu \tilde{\rho}^{(1)} + \dots, \\ E &= a_2 e^{i\mathcal{G}_2} + a_3 e^{i\mathcal{G}_3} + k.c. + \mu E^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где $a_j = a_j(\tau, \chi)$ – медленно меняющиеся амплитуды волн, $\mathcal{G}_j = k_j x - \omega_j t$, $k_j = k(\omega_j)$. Подставляем (12) в (8)–(10) и применяем асимптотический метод, изложенный на предыдущих лекциях (в данном случае уравнения настолько просты, что нет необходимости вводить операторы взамен производных по x и t). Это приводит к следующим уравнениям для амплитуд волн:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + c_s a'_{1,2} &= i \tilde{\sigma}_1 a_2^* a_3, \\ \dot{a}_2 - v_0 a'_2 &= i \tilde{\sigma}_2 a_1^* a_3, \\ \dot{a}_3 + v_0 a'_3 &= i \tilde{\sigma}_3 a_1 a_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{\sigma}_1 = \frac{\gamma_0 \omega_1}{8\pi c_s}$, $\tilde{\sigma}_2 = \frac{\gamma_0 \rho_0 \omega_2}{2\varepsilon_0 c_s}$, $\tilde{\sigma}_3 = \frac{\gamma_0 \rho_0 \omega_3}{2\varepsilon_0 c_s}$ – коэффициенты нелинейного взаимодействия.

При записи системы (13) мы положили $\mu = 1$, что равносильно возвращению к исходным («старым») переменным – см. переход от (5)–(7) к (8)–(10). В этом случае малость возмущений определяется непосредственно самими значениями амплитуд $|a_j|$. Можно показать, что связь плотности энергии с амплитудой для электромагнитных и акустической волн в данном случае имеет вид

$$W_{ЭМ} = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} |a_{2,3}|^2, \quad W_{АК} = 2\rho_0 |a_1|^2. \quad (14)$$

Если теперь с помощью (14) ввести число квантов в волнах и вычислить коэффициенты q_j , нетрудно проверить, что система (13) приводится к общему для консервативных сред виду (см. (17) в п.4.2).

Приближение заданного поля интенсивной световой волны.

Сохраним общую форму уравнений (1) и зададим знаки групповых скоростей волн такими же, как в системе (13). Фиксируя поле сильной волны ($a_3 = \text{const} = a_{30}$), получим из (1) уравнения

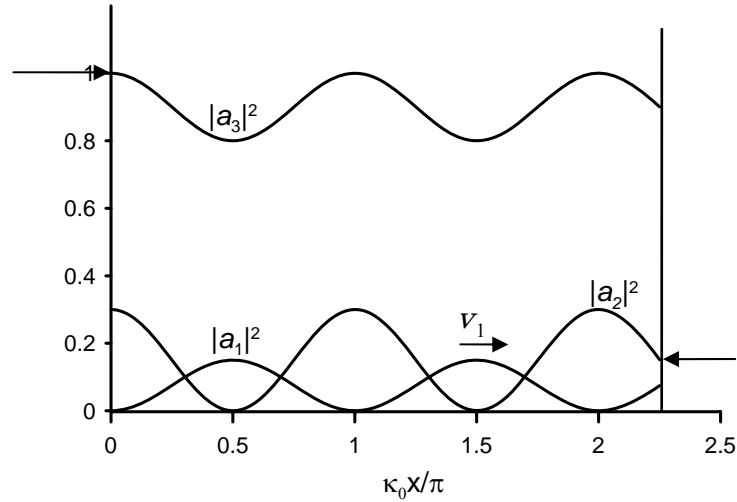


Рис. 2 Поведение интенсивностей волн в пространстве при вынужденном рассеянии Мандельштамма-Бриллюэна (длина нелинейной среды $l = (9\pi/4)/\kappa_0$)

$$v_1 a_1' = \sigma_1 a_2^* a_{30}, \quad -|v_2| a_2' = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (15)$$

которые сводятся к одному линейному уравнению

$$a_1'' + \kappa_0^2 a_1 = 0 \quad \left(\kappa_0^2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2^*}{v_1 |v_2|} |a_{30}|^2 > 0 \right). \quad (16)$$

Решение для сигнальной электромагнитной волны при задании граничного условия $a_1(0) = 0$ принимает вид

$$a_2 = a_2(l) \frac{\cos(\kappa_0 x)}{\cos(\kappa_0 l)}. \quad (17)$$

Интегралы (2) можно переписать в виде

$$v_1 N_1 + v_3 N_3 = C_1, \quad -|v_2| N_2 + v_3 N_3 = C_2. \quad (18)$$

Если формально искать решение задачи (15) с граничными условиями, поставленными в сечении $x=0$, то знаки в (18), соответствуют «нераспаднему» поведению высокочастотной волны. Это хорошо видно из рис. 2, на котором в качестве примера показано поведение интенсивностей всех волн при $\kappa_0 l = 9\pi/4$. Причина в том, что решение системы (1) с указанными знаками групповых скоростей формально сводится к решению временной задачи, в которой волна a_2 имеет отрицательную энергию. В этом смысле можно говорить о пространственно-временной аналогии для этих двух задач.

Однако в стационарной задаче сохраняется не энергия, а ее поток. После введения потоков энергии $\Pi_j = v_j \omega_j N_j$ соотношения Мэнли-Роу (18) примут вид

$$\frac{\Pi_1}{\omega_1} + \frac{\Pi_3}{\omega_3} = C_1, \quad \frac{\Pi_2}{\omega_2} + \frac{\Pi_3}{\omega_3} = C_2. \quad (19)$$

Используя (19), нетрудно построить диаграммы взаимодействия волн для потоков (рис. 3), в соответствии с которыми распадной волной будет высокочастотная волна ω_3 . Чтобы снять возникшее противоречие между «нераспадным поведением» амплитуд и диаграммами на рис. 3, следует учесть, что приращение потоков энергии (или потоков

квантов) пропорциональны приращениям $|a_j|^2$, взятым в направлении групповых скоростей волн. С учетом этого обстоятельства становится ясно, что изменение интенсивностей волн на рис. 2 происходит в полном соответствии и с (19) и с диаграммами на рис. 3.

Напомним, что при распадном характере взаимодействия волн во времени была возможна полная перекачка энергии высокочастотной волны в низкочастотные. Такая перекачка в принципе не запрещена и в рассматриваемом случае пространственного взаимодействия волн с разными знаками групповых скоростей. Вычислим коэффициент усиления сигнальной волны «на проход» через среду:

$$K_A = \frac{|a_2(0)|}{|a_2(l)|} = \frac{1}{|\cos(\kappa_0 l)|}. \quad (20)$$

Видно, что K_A обращается в бесконечность при $\kappa_0 l = n\pi + (\pi/2)$, где $n = 1, 2, \dots$ – целое. При больших K_A приближение заданного поля нарушается и возможна существенная перекачка энергии высокочастотной волны в низкочастотные. При этом следует решать полную систему уравнений (1). Нелинейная среда как бы «находит» возможность реализовать распадный характер взаимодействия волн в полной мере.

Таким образом, существенное преобразование энергии высокочастотной волны в низкочастотные при ВРМБ возможно, однако оно происходит при определенном соотношении между интенсивностью накачки и длиной области взаимодействия. Если это соотношение не выполняется, реализуется распадный характер преобразования мощности, но при относительно малых пространственных биениях их интенсивностей.