

ОСОБЕННОСТИ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ ЭНЕРГИИ

Как уже отмечалось, в средах, далеких от состояния термодинамического равновесия (неравновесных средах) волны могут иметь отрицательную энергию. Соотношения Мэнли-Роу для взаимодействия трех пространственно-однородных волн с учетом знаков их энергии были получены на предыдущих лекциях (см. (19) п.4.2):

$$s_1 N_1 + s_3 N_3 = C_1, \quad s_2 N_2 + s_3 N_3 = C_2, \quad s_1 N_1 - s_2 N_2 = C_3 \quad (1)$$

где s_j – знак энергии j -ой волны, N_j – число квазичастиц в j -ой волне. Ранее были изучены взаимодействия в равновесных средах, когда все волны имеют положительную энергию. Теперь зададимся вопросом, какие качественные особенности появляются при наличии волн с отрицательной энергией (ВОЭ).

Распадность НЧ- волн (преобразование частоты вверх). Пусть при трехволновом взаимодействии отрицательную энергию имеет одна из НЧ-волн: $s_1 = -1 < 0$, $s_{2,3} = +1 > 0$.

Тогда соотношения Мэнли-Роу примут вид

$$N_3 - N_1 = C_1, \quad N_2 + N_3 = C_2, \quad N_1 + N_2 = C_3 \quad (2)$$

Рассуждая так же, как при рассмотрении трехволновых процессов в равновесной среде, нетрудно видеть, что распадаться будет НЧ волна с частотой ω_2 . Это иллюстрируют диаграммы изменения числа квазичастиц, показанные на рис. 1. В данном случае возможны параметрическое усиление и параметрическая генерация волн при низкочастотной накачке. Наиболее интересен случай, когда частота сигнальной волны мала по сравнению с частотой накачки: $\omega_2 \gg \omega_1$, так как это позволяет продвинуться при усилении или генерации вверх по диапазону. Такая возможность существует, например, в релятивистском электронном пучке, скорость которого близка к скорости света. На рис. 2 показаны условия резонанса для взаимодействия двух электромагнитных волн и волны пространственного заряда в таком пучке (для простоты показана только ветка медленной волны пучка, имеющей отрицательную энергию). Дополнительная энергия для размножения энергичных (высокочастотных) квантов при этом черпается из пучка, в котором возбуждается волна отрицательной энергии.

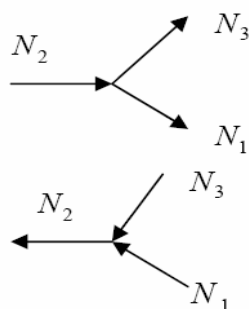


Рис. 1 Диаграммы изменения числа квазичастиц при $s_1 s_{2,3} < 0$. Верхняя диаграмма соответствует распаду НЧ-волны ω_2

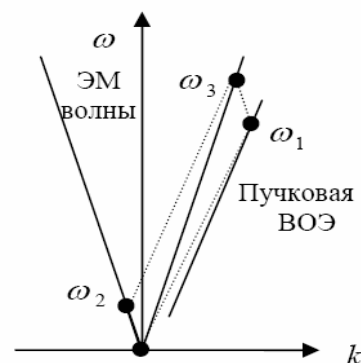


Рис. 2. Параметрическое усиление высокочастотной ЭМ волны ω_3 при низкочастотной накачке $\omega_2 \ll \omega_3$ в релятивистском электронном потоке

Заметим, что в данном случае не следует заново решать уравнения для амплитуд волн. Формально решение данной задачи сводится к решению задачи о распаде волны в равновесной среде с помощью простой замены переменных (фактически, – к изменению нумерации волн).

Взрывная неустойчивость волн. Наиболее нетривиальная ситуация возникает, когда высокочастотная волна имеет знак энергии, противоположный знакам энергии низкочастотных волн, например, $s_3 = -1 < 0$, $s_{1,2} = +1 > 0$. В этом случае соотношения Мэнли-Роу принимают вид

$$N_3 - N_1 = C_1, \quad N_2 - N_3 = C_2, \quad N_1 - N_2 = C_3. \quad (3)$$

Диаграммы изменения числа квазичастиц показаны на рис. 3. Все волны одновременно растут, либо одновременно исчезают. На квантовом языке это процесс рождения трех квантов из ничего. Однако полная энергия волнового поля при этом сохраняется так как кванты ω_3 имеют отрицательную энергию.

Используя нормировки коэффициентов взаимодействия на единицу, получим уравнения для комплексных амплитуд вида

$$\frac{db_1}{dt} = b_2^* b_3, \quad \frac{db_2}{dt} = b_1^* b_3, \quad \frac{db_3}{dt} = b_2 b_1. \quad (4)$$

Ограничимся частным решением, когда все амплитуды действительны (фазы равны нулю) и одинаковы $B_1(t) = B_2(t) = B_3(t) \equiv B(t)$. При этом постоянные в интегралах (3) равны нулю. Такое решение существует, поскольку все три уравнения принимают одинаковый вид

$$\frac{dB}{dt} = B^2. \quad (5)$$

Решение уравнения первого порядка (5) легко находится и имеет вид

$$B = \frac{B(0)}{1 - \frac{t}{t_\infty}}, \quad t_\infty = \frac{1}{B(0)}. \quad (6)$$

Амплитуды всех волн обращаются в бесконечность за конечное время (рис. 3). Поэтому t_∞ называется «временем взрыва», а сам процесс – взрывной неустойчивостью.

В чем состоит механизм взрывного роста волн? Запишем выражения для относитель-

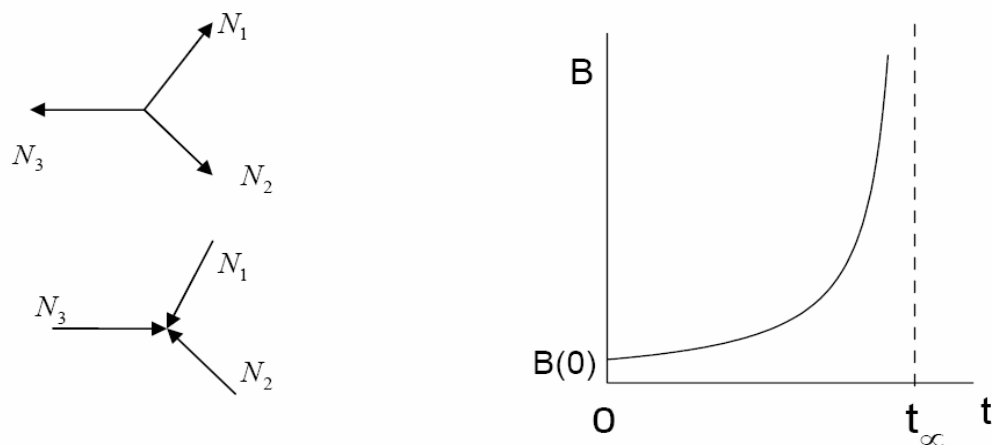


Рис. 3. Диаграммы изменения числа квазичастиц (а) и взрывной рост амплитуд волн во времени при $s_3 \cdot s_{1,2} < 0$ (б).

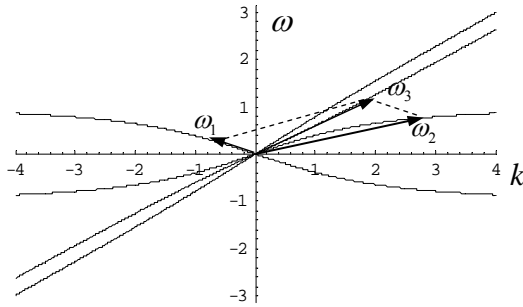


Рис. 4. Взрывная неустойчивость в плазменно–пучковой системе с редукцией пространственного заряда. Плазменные волны положительной энергии $\omega_{1,2}$ резонансно связаны с медленной волной электронного пучка ω_3 , имеющей отрицательную энергию. Благодаря большой скорости пучка исключен линейный резонанс плазменной и пучковых волн

ной скорости роста при обычной (экспоненциальной) неустойчивости и при взрывной неустойчивости:

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = \gamma, \quad \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = B. \quad (7)$$

В первом случае относительная скорости роста постоянна, тогда как во втором – она растет по мере увеличения амплитуды. Именно это ускорение скорости роста и дает взрыв. В связи с этим понятно, что взрывная неустойчивость по существу является нелинейной неустойчивостью.

В качестве примера трехволнового взаимодействия, приводящего к взрывной неустойчивости, на рис. 4 показано взаимодействие двух плазменных волн с волной отрицательной энергии в электронном потоке. Наиболее интересен случай, когда в ограниченном по сечению пучке скорость потока достаточно велика, поскольку при этом отсутствует линейная резонансная неустойчивость. Однако система остается неравновесной и нет ничего удивительного в том, что возникает новый тип неустойчивости – взрывная. Таким образом, взрывная неустойчивость как бы принимает эстафету от линейной резонансной неустойчивости при увеличении скорости потока. Именно через нее теперь реализуется способность неравновесной среды стремиться к равновесному состоянию через нарастание возмущений и последующей их диссипацией в тепло.

Замечания.

- 1) С точки зрения теории колебаний взрывная неустойчивость есть неустойчивость по нелинейному приближению, так как линеаризованное уравнение (5) имеет вид $dB/dt = 0$, т.е. решение нейтрально устойчиво. Из курса теории колебаний известно, что при наличии в линейном приближении нейтральной устойчивости следует переходить к исследованию неустойчивости в нелинейном приближении. Эта нелинейная неустойчивость возможна при выполнении условий резонанса.
- 2) В действительности, конечно, амплитуды не могут вырасти до бесконечности. В лучшем случае закон может проявиться на определенном участке времени, пока не нарушаются приближения, при которых получены амплитудные уравнения. Это может произойти при выходе за пределы приближения малой нелинейности или ограничение может наступить при учете каких-либо факторов уже в рамках приближения малой нелинейности. Именно механизм ограничения определяет максимальную скорость роста (нелинейный инкремент). В принципе взрывная неустойчивость может так и не достичь скорости роста при линейной неустойчивости (если она имеется в данной среде). Поэтому всегда существует вопрос о конкурентоспособности взрывной неустойчивости по сравнению и имеющимися в среде линейными неустойчивостями.