ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВИЙ ТРЕХВОЛНОВОГО РЕЗОНАНСА.

Отметим, что в общем случае условия резонанса могут выполняться не точно:

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega, \tag{1}$$

где $\omega_j = \omega(k_j)$, $\Delta\omega$ – расстройка частот волн от резонанса, которая предполагается малой. При наличии линейных потерь и расстройки от резонанса уравнения трехволнового взаимодействия принимают вид

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + v_{1,2}\frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} = \sigma_{1,2} a_3 a_{2,1}^* \mathrm{e}^{i\Delta\omega t} - \gamma_{1,2} a_{1,2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3\frac{\partial a_3}{\partial x} = \sigma_3 a_2 a_1 \mathrm{e}^{-i\Delta\omega t} - \gamma_3 a_3$$

где σ_j – коэффициенты взаимодействия, γ_j – декременты линейного затухания волн, которые появляются при наличии в среде малой диссипации (например мнимой части диэлектрической проницаемости). Нетрудно видеть, что $\gamma_j = -\operatorname{Im}\omega(k_j)$ с точностью до поправок второго порядка малости, если под $\omega(k_j)$ понимается решение полного (с учетом потерь) дисперсионного уравнения. Дополнительный сомножитель $\exp(i\Delta\omega t)$ не нарушает применимости уравнений (2), так как является медленно меняющейся функцией времени. Уравнения резонансного трехволнового взаимодействия (2) – одна из важнейших базовых моделей нелинейной физики.

На плоскости (k,ω) каждая волна отображается радиус-вектором $l_n = (k_n, \omega_n)$, один конец которого находится в начале координат, а другой лежит на дисперсионной кривой. Поэтому условия резонанса (1) можно записать в виде уравнения для этих векторов: $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3$ (для краткости считаем $\Delta\omega = 0$). Тогда в соответствии с правилом сложения векторов резонансные волны должны находиться в вершинах и на диагонали параллелограмма, образованного векторами $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$. Два таких примера приведены на

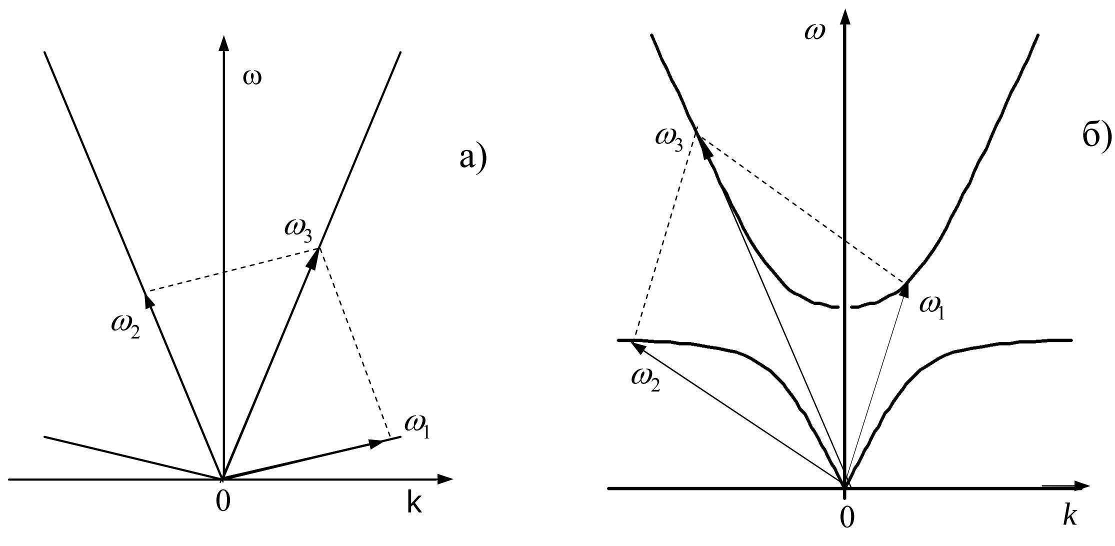
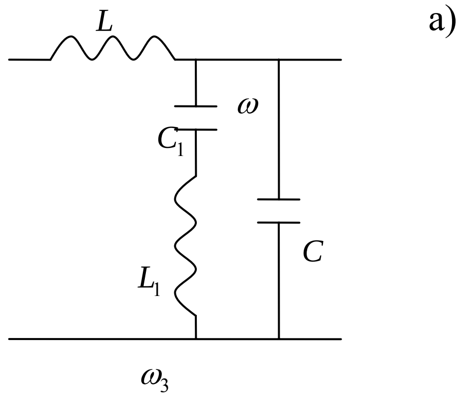


Рис. 1 Графическое отыскание трехволновых резонансов с помощью правила параллелограмма



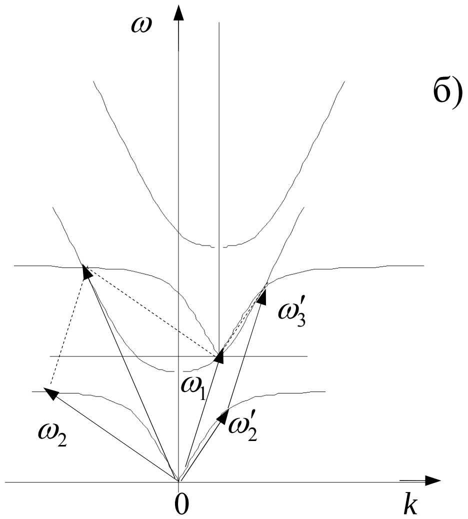


Рис. 2 Схема звена LC-линии, дисперсионные кривые которой совпадают с показанными на рис. 1б, (а) и геометрическое построение, позволяющее однозначно определить резонансные тройки волн (б). Численный расчет при $\beta = 1.44$, $\omega_0 = 1, \omega_1 = 0.5$ (предполагается, что уравнения предварительно нормированы и $\omega_{0,1}$ – безразмерные аналоги исходных величин)

рис. 1. Дисперсионные кривые, подобные показанным на рис.1а, возникают, например при взаимодействии электромагнитных и акустических волн в среде с электрострикционным эффектом (эта задача будет рассмотрена позднее – п.4.4). Дисперсионные ветви, можно моделировать с помощью LC – линии, схема звена которой показана на рис. 2а. Для такой линии получаем

$$k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{\beta \omega_1^2 - \omega}{\omega_1^2 - \omega}},$$

где $\beta = 1 + \frac{C_1}{C} > 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ Заметим, что точное определение резонансной тройки по одной произвольно выбранной волне (например, с частотой ω_1) не вызывает затруднений в случае простой дисперсии (рис. 1а). В то же время для более сложных кривых на рис. 1б это связано применением «метода подбора». Существует, однако, геометрическое построение, позволяющее однозначно найти резонансные тройки волн. На рис. 2б оно показано для дисперсионных кривых, приведенных на рис. 1б. Выберем какую-либо одну волну (например, (ω_1, k_1)) и сделаем параллельный перенос всей плоскости так, чтобы начало координат совпало с этой волной. Нетрудно понять, что искомые резонансные триплеты определяются по точкам пересечения исходных и смещенных дисперсионных ветвей. Видно, что выбранной волне соответствует два резонансных триплета. Если взять исходную волну ω_1 с более высокой частотой, остается только один триплет. При сложной дисперсии возможно существование нескольких резонансных триплетов с участием выбранной волны. Для двумерных волновых систем (например, для волн на воде), дисперсионные ветви отображаются поверхностями $\omega = \omega(k_x, k_y)$ и соответственно следует рассматривать пересечение основной и смещенной поверхностей в трехмерном пространстве.