

РЕЗОНАНСНОЕ ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

Волны с отрицательной энергией встречаются не столь часто, и являются в значительной степени экзотикой для большинства приложений. Поэтому основополагающее значение имеет анализ взаимодействия волн положительной энергии. Напомним, что мы условились считать частоты волн положительными и в соответствии с условием резонанса частот $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ называть волны $\omega_{1,2}$ низкочастотными, а волну ω_3 – высокочастотной. С учетом того, что в равновесной среде энергия волн положительна ($s_j = +1 > 0$), общие соотношения Мэнли-Роу (см. (20) в п.4.2) принимают следующий вид

$$N_1 + N_3 = \text{Const}_1, \quad N_2 + N_3 = \text{Const}_2, \quad N_1 - N_2 = \text{Const}_3. \quad (1)$$

Допустим, что в процессе взаимодействия число квантов одной из НЧ-волн, например, a_1 увеличилось на ΔN . Тогда из (1) следует, что число квантов другой НЧ-волны a_2 тоже увеличилось на ΔN , а число квантов высокочастотной волны уменьшилось на ΔN . Другими словами, процесс протекает так, как будто произошло ΔN элементарных актов рождения квазичастиц, в каждом из которых выполнены законы сохранения энергии и импульса (если их приравнять к условиям трехволнового резонанса). Обратный процесс сводится к слиянию квазичастиц $\omega_{1,2}$ с рождением ω_3 . Возможные направления трансформации волн иллюстрируются диаграммами на рис. 1. Любые другие преобразования запрещены законами сохранения.

Распадная неустойчивость высокочастотной волны

Интегралы определяют только направление возможного изменения амплитуд. Чтобы определить, как амплитуды зависят от времени следует решить уравнения. Начнем с самых простых решений, которые находятся в приближении заданного поля одной из волн. Систему уравнений резонансного взаимодействия трех волн во времени представим в виде

$$\dot{a}_3 = \sigma_3 a_1 a_2, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad \dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad (2)$$

где $\sigma_{1,2} = \sigma / q_{1,2}$, $\sigma_3 = -\sigma^* / q_3$. Отметим, что на практике обычно выводится именно система уравнений вида (2) с коэффициентами взаимодействия σ_j . Выражения для энергии и «числа квазичастиц», как правило, не используются явно, так как они не нужны непосредственно для решения уравнений. Эти понятия введены выше, в основном, для выяснения

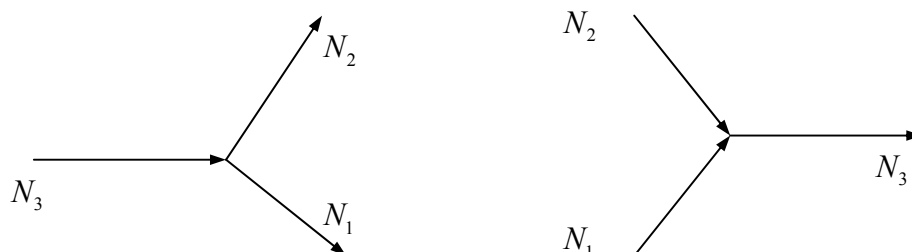


Рис. 2 Диаграммы трехволнового взаимодействия в равновесных средах

общих свойств трехволновых взаимодействий. В то же время, данные выше выражения для σ_j через σ, q_j существенно ограничивают область допустимых значений σ_j . В конечном счете эти ограничения определяют свойства самих резонансных взаимодействий в равновесных средах.

Допустим, что $N_3(0) \gg N_{1,2}(0)$, то есть в начальный момент имеется интенсивная ВЧ-волна. В этом случае можно использовать метод возмущений, считая в первом приближении амплитуду сильной волны постоянной (иногда это называют «приближением заданного поля»):

$$\dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_{30}, \quad \dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_{30}, \quad a_3 = a_{30} = const \quad (3)$$

Эта система уравнений легко сводится к одному уравнению второго порядка

$$a_2 = \frac{\dot{a}_1^*}{\sigma_1 a_{30}}, \quad \ddot{a}_1 - \Gamma_0^2 a_1 = 0, \quad \Gamma_0 = \sigma_1 \sigma_2^* > 0 \quad (4)$$

Соотношение $\Gamma_0 > 0$ выводится из представления коэффициентов σ_j через σ, q_j . Решение (4) с начальными условиями $a_1(0) \neq 0, a_2(0) = 0$ имеет вид

$$a_1 = a_1(0) \operatorname{ch}(\Gamma_0 t) \rightarrow \frac{1}{2} a_1(0) \exp(\Gamma_0 t),$$

$$a_2^* = \frac{\Gamma_0 a_1(0)}{\sigma_1 a_{30}} \operatorname{sh}(\Gamma_0 t), \quad (5)$$

Таким образом, возникает экспоненциальное нарастание двух слабых волн, из-за чего процесс был назван распадной неустойчивостью. Поскольку наличие сильной волны можно интерпретировать как заданные ею изменения параметров среды, данная неустойчивость иногда называется параметрической неустойчивостью пары низкочастотных волн (заметим, что понятие параметрической неустойчивости имеет более широкий смысл, например, изменение параметров среды может быть связано с наложением внешних полей, которые не являются собственными волнами).

«Нераспадность» низкочастотных волн

Пусть теперь в начальный момент имеется интенсивная НЧ-волна, например a_2 . При $N_2(0) \gg N_{1,3}(0)$ в приближении ее заданного поля $a_2 = a_{20} = const$ получим

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_{20}^* a_3, \quad \dot{a}_3 = \sigma_3 a_1 a_{20}. \quad (6)$$

Решение (6) с начальными условиями $a_1(0) \neq 0, a_3(0) = 0$ принимает вид

$$a_1 = a_1(0) \cos(\Omega_0 t), \quad a_3 = -\frac{\Omega_0 a_1(0)}{\sigma_1 a_{20}^*} \sin(\Omega_0 t), \quad (7)$$

где $\Omega_0 = -\sigma_1 \sigma_3 > 0$ в соответствии с ограничениями на коэффициенты в консервативной среде. Таким образом, в консервативной равновесной среде волны $a_{1,3}$ остаются слабыми и осциллируют во времени. Действуя последовательно в духе метода возмущений можно найти поправку к амплитуде волны a_2 :

$$a_2 = a_{20} + \int_0^t \sigma_2 a_1^* a_3 dt = a_{20} \left[1 - \frac{\sigma_2 |a_1(0)|^2}{2\sigma_1 |a_{20}|^2} \sin^2(\Omega_0 t) \right]. \quad (8)$$

Заметим, что в силу свойств коэффициентов взаимодействия в консервативной равновесной среде $\sigma_2/\sigma_1 > 0$, т.е. коэффициент при $\sin^2(\Omega_0 t)$ вещественный и положительный.

Поведение амплитуд всех волн показано на рис. 2. Полученный результат легко понять на «квантовом языке». Сначала идет рождение квантов ВЧ-волны за счет квантов НЧ-волн $a_{1,2}$. Но поскольку квантов НЧ-волны a_1 мало, этот процесс быстро прекращается и начи-

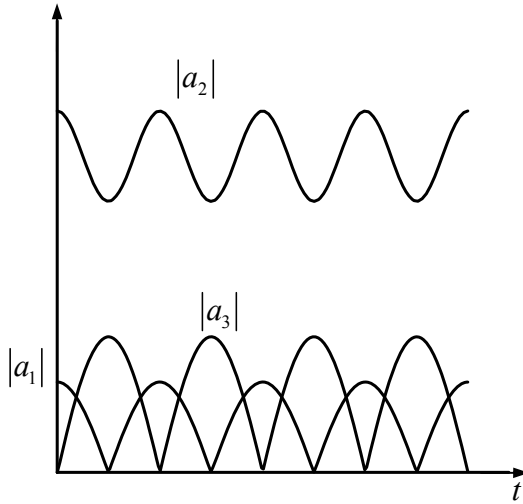


Рис. 2 «Нераспадность» низкочастотной волны в равновесной среде без потерь. Направление изменения амплитуд волн соответствует диаграммам на рис. 1. Поэтому уменьшение амплитуды $|a_2|$ прекращается после обращения в ноль $|a_1|$

нается обратный процесс распада высокочастотной волны, который тоже быстро заканчивается в силу малости запасов квантов волны a_3 . В результате амплитуды всех волн $a_{1,3}$ слабо осциллируют, т.е. не происходит их существенных изменений. Таким образом, распад НЧ-волн в равновесной среде невозможен.

Исследование трехволнового взаимодействия в фазовом пространстве

Уберем сначала коэффициенты взаимодействия из уравнений (2) путем масштабного преобразования амплитуд. Положим в системе (2) $a_j = \alpha_j b_j$ и выберем α_j так, чтобы все коэффициенты взаимодействия стали равны единице. Оказывается, что для равновесной среды это всегда можно сделать. В соответствии с выражениями для комплексных коэффициентов σ_j через σ, q_j , для их фаз получим

$$\arg(\sigma_1) = \arg(\sigma_2) = -\arg(\sigma_3) + \pi \equiv \psi. \quad (9)$$

Тогда нетрудно проверить, что преобразование

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_2 \sigma_3|}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_1 \sigma_3|}}, \quad \alpha_3 = \frac{e^{-i\psi}}{\sqrt{|\sigma_1 \sigma_2|}} \quad (10)$$

приводит уравнения (2) к виду

$$\dot{b}_3 = -b_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = b_1^* b_3, \quad \dot{b}_1 = b_2^* b_3. \quad (11)$$

В системе (11) все коэффициенты вещественны и по модулю равны единице. Для удобства чтения литературы приведем другой вариант замены, который приводит к уравнениям с чисто мнимыми коэффициентами. По сути это ничего не меняет, но довольно часто коэффициенты получаются чисто мнимыми сами по себе (в силу выбора нормировок). Если ввести в (11) $b_3 = i b_3^{\text{нов.}}$, получим уравнения с чисто мнимыми коэффициентами (индекс «нов.» отбрасываем):

$$\dot{b}_3 = i b_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = i b_1^* b_3, \quad \dot{b}_1 = i b_2^* b_3. \quad (12)$$

Обратим внимание на то, что в отличие от (11) знаки всех коэффициентов в системе (12) одинаковы. В практических задачах в силу естественных нормировок обычно получается система типа (11) с вещественными коэффициентами, либо (12) – с мнимыми. И в том и в другом случае коэффициенты удовлетворяют указанным выше условиям для консервативной равновесной среды.

Для перехода к вещественной форме уравнений (12) введем амплитуды и фазы волн, полагая $b_j = B_j \exp(i\varphi_j)$. Тогда, например, первое уравнение принимает вид

$$\dot{B}_{1,2} + iB_{1,2}\dot{\varphi}_{1,2} = iB_{2,1}B_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \quad (13)$$

Приравнявая нулю вещественные и мнимые части в уравнениях (12), получим

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -B_2B_3 \sin \phi, & \dot{B}_2 &= -B_1B_3 \sin \phi, & \dot{B}_3 &= B_1B_2 \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \left(\frac{B_1B_2}{B_3} - \frac{B_1B_3}{B_2} - \frac{B_2B_3}{B_1} \right) \cos \phi & (\phi &= \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Это классическая форма уравнений трехволнового взаимодействия. В них входит только разность фаз волн ϕ , что связано с отсутствием зависимости решений от выбора начала отсчета времени (трансляционной симметрией по времени). Система (14) имеет интегралы движения

$$B_1^2 + B_3^2 = C_1, \quad B_2^2 + B_3^2 = C_2, \quad B_2^2 - B_1^2 = C_3, \quad (15)$$

которые есть ни что иное как другая форма записи соотношений Мэнли-Роу. С учетом интегралов (15) общее решение (14) записывается через специальные функции. Этот вопрос достаточно подробно изложен в литературе.

Мы ограничимся качественным исследованием частного класса решений (14), для которых $\phi = \text{const} = \pi/2$. Очевидно, что такой класс решений существует. При этом амплитуды остаются вещественными и уравнения (14) принимают вид:

$$\dot{B}_{1,2} = -B_{2,1}B_3, \quad \dot{B}_3 = B_1B_2, \quad (16)$$

Анализ фазовых траекторий в пространстве (B_1, B_2, B_3) удобно провести на основе двух интегралов системы (16) вида

$$B_1^2 + B_2^2 + 2B_3^2 = C_0, \quad B_1^2 + B_3^2 = C_1 \quad (17)$$

(их легко получить из (15)). Первый интеграл есть поверхность эллипсоида с полуосями

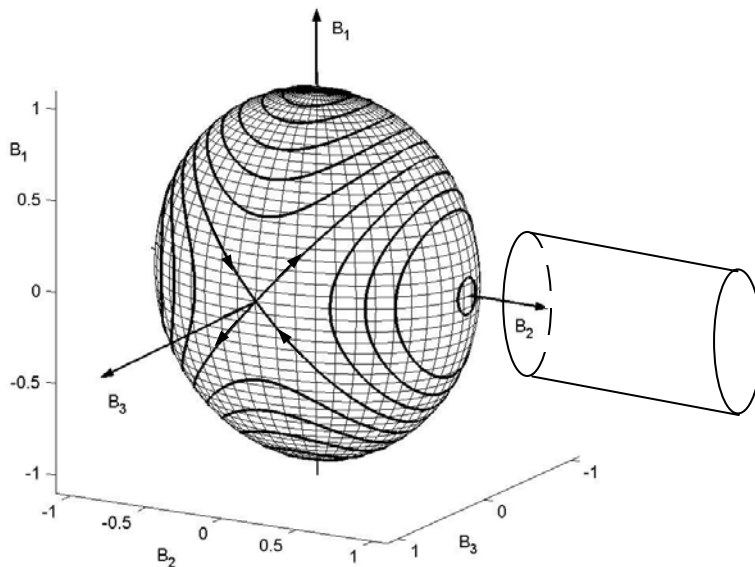


Рис. 3 К построению фазовых траекторий системы (16) на эллипсоиде

$(1, 1, 1/\sqrt{2})$. Интегральные (фазовые) кривые получаются при сечении этого эллипсоида цилиндрической поверхностью, которую определяет второй интеграл (17). Эта поверхность схематически показана на рис. 3 справа от эллипсоида. Поскольку всегда можно избавиться от C_0 с помощью нормировки всех амплитуд на $\sqrt{C_0}$, без ущерба общности можно положить в (17) $C_0 = 1$. Варьируя постоянную C_1 (квадрат радиуса цилиндрической поверхности), можно построить все множество интегральных кривых на поверхности эллипсоида – рис. 3. Поскольку размер полуоси эллипсоида вдоль координатной оси B_3 меньше единицы, на имеются седловые точки, которые возникают при касании цилиндрической поверхности с краями эллипсоида, расположенными на оси B_3 . Состояния равно-

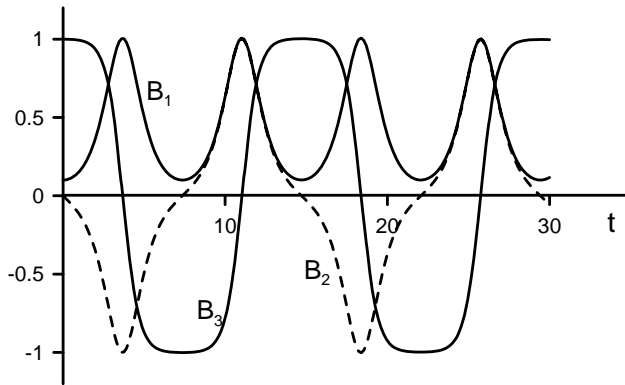


Рис. 4 Зависимость амплитуд волн от времени при распадной неустойчивости интенсивной высокочастотной волны: $B_1(0) = 0.1$, $B_2(0) = 0$, $B_3(0) = 1$

весия типа центр получаются при касании цилиндрической поверхности с «макушкой» эллипсоида и при $C_1 = 0$. Направление движения по фазовым траекториям находится с учетом (16).

Используя рис. 3, нетрудно определить поведение амплитуд волн в зависимости от времени. 1) Если фазовая траектория начинается в окрестности крайних точек эллипсоида по осям B_1 или B_2 ($|B_2(0)| \gg |B_{1,3}(0)|$), она остается возле состояния равновесия типа центр. В этом случае имеем малые осцилляции $B_{1,2,3}$, рассмотренные ранее в приближении заданного поля (см. рис. 2). Это соответствует режиму отсутствия распада НЧ-волн. 2) Если траектория начинается в окрестности крайних точек эллипсоида по оси B_3 ($|B_3(0)| \gg |B_{1,2}(0)|$), она попадает в окрестность седла и начинает медленно смещаться вдоль сепаратрисы. В этом случае происходит полный (с переходом через ноль) распад B_3 и возникают протяженные пологие участки зависимости $B_3(t)$, связанные с прохождением траектории возле седловой точки. Такое поведение фазовой траектории соответствует режиму распада ВЧ-волны. Пример зависимости амплитуд волн от времени при распадной неустойчивости показан на рис. 4. Видно, что энергообмен между волнами имеет обратимый, обменный характер. Сепаратрисе соответствует решение с одиночным перепадом B_3 и «пичками» $B_{1,2}$. Отметим, что обменный характер взаимодействия волн подразумевает наличие динамики их фаз, так как смена знака B_j равнозначна скачку фазы на π при определенно положительном B_j .

Вырожденное трехволновое взаимодействие (генерация второй гармоники)

Трехволновое взаимодействие возможно в системе из двух волн, кванты одной из которых сливаются друг с другом. Условия резонанса в данном случае принимают вид

$$2k_1 = k_2, \quad 2\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega, \quad (18)$$

где $\omega_1 = \omega(k_1)$, $\omega_2 = \omega(k_2)$, $\Delta\omega$ – расстройка частот волн от резонанса, которая предполагается малой. Этот процесс лишь формально называется трехволновым, так как фактически в нем участвуют две волны, частоты и волновые числа которых различаются в два раза. Уравнения для развития комплексных амплитуд во времени записываются в виде

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_1^* a_2 e^{i\Delta\omega t}, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^2 e^{-i\Delta\omega t}. \quad (19)$$

Используя свойства коэффициентов взаимодействия в консервативной среде, после введения нормировок уравнения (19) можно преобразовать к виду

$$\dot{b}_1 = ib_1^* b_2 e^{i\Delta\omega t}, \quad \dot{b}_2 = ib_1^2 e^{-i\Delta\omega t}. \quad (20)$$

После перехода к вещественной форме записи вместо (20) получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -B_1 B_2 \sin \phi, \quad \dot{B}_2 = B_1^2 \sin \phi \quad (\phi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \Delta\omega t), \\ \dot{\phi} &= \left(\frac{B_1^2}{B_2} - 2B_2 \right) \cos \phi + \Delta\omega. \end{aligned} \quad (21)$$

Система (20) имеет интеграл (соотношение Мэнли–Роу)

$$B_1^2 + B_2^2 = C^2. \quad (22)$$

Из (22) следует, что амплитуды волн всегда изменяются в противоположных направлениях: если B_1 растет, то B_2 убывает, либо наоборот. На квантовом языке два кванта волны B_1 сливаясь дают квант второй гармоники B_2 . Либо квант B_2 распадается на два кванта волны B_1 . Таким образом, возможна распадная неустойчивость высокочастотной волны удвоенной частоты или, что то же самое, параметрическая неустойчивость волны, частота которой равна половине частоты накачки. Отметим, что система (21) допускает исследование на фазовой плоскости при произвольной разности фаз $\phi = 2\omega_1 - \omega_2 + \Delta\omega$ и произвольной расстройке от резонанса $\Delta\omega$.