РЕЗОНАНСНОЕ ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗИМОДЕЙСТВИЕ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СРЕДАХ

Простая модель консервативной среды. Вывод укороченных уравнений. В качестве примера консервативной среды рассмотрим распределенную $LC-$линию с нелинейными элементами – емкостью и индуктивностью. Телеграфные уравнения для нее принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \underbrace{\frac{dQ}{dU}}_{C_{NL}(U)} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \underbrace{\frac{d\phi}{dI}}_{L_{NL}(I)} \frac{\partial I}{\partial t}. \end{gathered} \tag{1}$$

Производные dQ/du и $d\phi/dI$ есть по определению емкость и индуктивность. В линейной системе это постоянные величины, а в нелинейной – функции напряжения и тока. На рис. 1 показаны характеристики реальных элементов. В данном разделе ограничимся линейной аппроксимацией функций $L_{NL}(I)$ и $C_{NL}(U)$, полагая $L_{NL} = L_0 - \beta(I - I_0)$ и $C_{NL} = C_0 + \alpha(U - U_0)$, что приводит к уравнениям (1) с «квадратичными» нелинейностями. Нелинейная емкость возникает при подаче запирающего смещения на p-n переход. Нелинейная индуктивность – вследствие нелинейной зависимости магнитного потока в ферромагнитном сердечнике от тока в обмотке катушки индуктивности. Мы не останавливаемся на том, как подать постоянное смещение на p-n переход и создать постоянный ток через индуктивность.

Простейшую $LC-$линию с нелинейной емкостью и индуктивностью можно модифицировать для моделирования нелинейной среды с дисперсией, если включить последова-

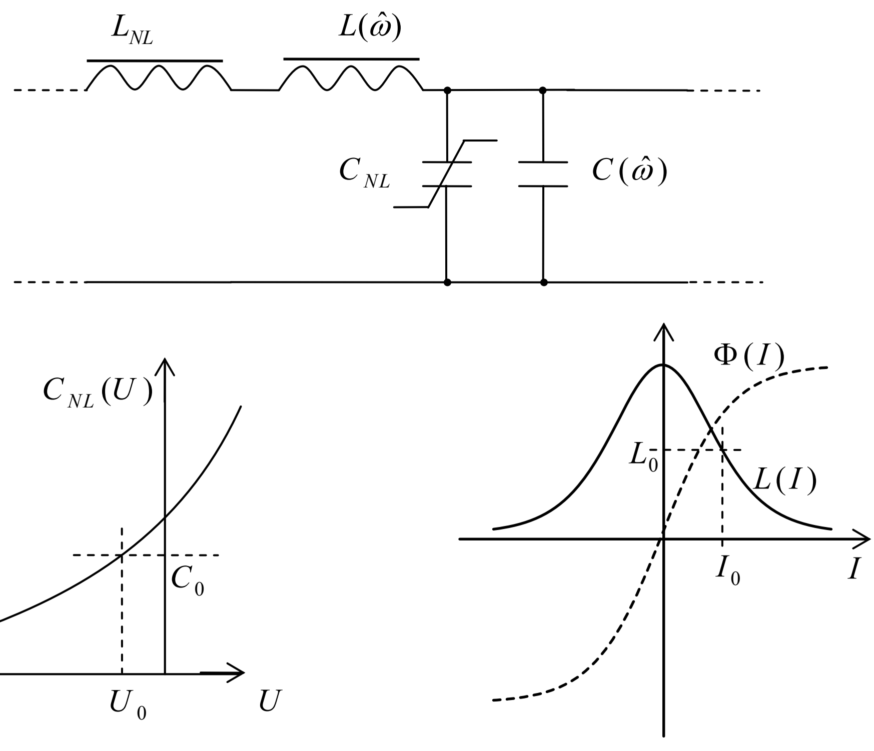

Рис.1 LC – линия с нелинейными и частотно зависимыми линейными элементами и физические характеристики нелинейных элементов тельно с нелинейной индуктивностью частотно-зависимую линейную индуктивность, а параллельно с нелинейной емкостью – частотно зависимую линейную емкость (рис. 1). Для удобства присоединим постоянные составляющие нелинейных элементов C_0 и L_0 к частотно-зависимым элементам. Таким образом, в (1) делается замена

$$L_{NL} \to L(\hat{\omega}) - \beta I_{\sim}, \quad C_{NL} \to C(\hat{\omega}) + \alpha u, \tag{2}$$

где $I_{\sim} = I - I_0$, $u = U - U_0$ – возмущения тока и напряжения. Отметим, что нелинейная индуктивность практически не используется для моделирования консервативных сред, поскольку ферромагнетики имеют широкую петлю гистерезиса и соответственно большие потери. Она введена в уравнения (1) для иллюстрации общности подхода, поскольку в этом случае нелинейность присутствует в обоих уравнениях. Нелинейная емкость хорошо подходит для моделирования слабо диссипативной среды, так как емкость запертого p-n-перехода имеет высокую добротность.

Введенные выше аппроксимации для нелинейной емкости и индуктивности основаны на том, что возмущения достаточно малы. Чтобы в явном виде показать в уравнениях малые члены, введем малый параметр ε, полагая $u = \varepsilon u_{нов.}$, $I_{\sim} = \varepsilon I_{нов.}$ и опуская в дальнейшем индекс «нов.». Строго говоря, последовательное введение малого параметра, предполагает переход к безразмерным переменным. В данный момент мы не будем углубляться в этот вопрос и сохраним размерностные переменные. Можно считать, что в этом случае малый параметр указывает на относительные значения величин одинаковой размерности. Другая трактовка такого введения ε состоит в том, что необходимые нормировки всегда можно сделать и соответственно выделить малый параметр явно.

После подстановки (2) в (1) и введения оператора $\hat{k} = -i\partial/\partial x$ телеграфные уравнения принимают вид

$$i\hat{k}I - i\hat{\omega}C(\hat{\omega})u = -\varepsilon\frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad i\hat{k}u - i\hat{\omega}L(\hat{\omega})I = \varepsilon\frac{\partial f_2}{\partial t}, \tag{3}$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\alpha u^2, \quad f_2 = \frac{1}{2}\beta I^2.$$

Уравнения (3) можно рассматривать как математическую модель нелинейной консервативной среды с дисперсией. Преобразуем систему (3), разрешая ее относительно напряжения и тока как систему неоднородных линейных уравнений:

$$\underbrace{i\left(\frac{\hat{\omega}^2 L(\hat{\omega})C(\hat{\omega}) - \hat{k}^2}{\hat{\omega}L(\hat{\omega})}\right)}_{D(\hat{\omega},\hat{k})}u = \varepsilon\left(\frac{i\hat{k}}{L(\hat{\omega})}f_2 - i\hat{\omega}f_1\right), \tag{4}$$

$$I = \frac{\hat{k}}{L(\hat{\omega})}u + \varepsilon\frac{1}{L(\hat{\omega})}f_2.$$

Напомним, что использовать операторы $\hat{\omega}$ и $\hat{k}$ это фактически то же самое, что совершить преобразование Фурье, а затем обратно перейти к оригиналам. Решение (4) ищем в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ I \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_j \begin{pmatrix} 1 \\ \psi_2(k_j) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ik_j x - i\omega_j t} + k.c. + \varepsilon\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ I^{(1)} \end{pmatrix} + \ldots \quad (\tau = \varepsilon t, \chi = \varepsilon x), \tag{5}$$

где $D(\omega_j, k_j) = 0$, $\psi_2(k_j) = k_j/(\omega_j L_j) = \pm\sqrt{C_j/L_j}$. Входящие главную часть (5) три волны являются собственными, т. е. $\omega_j = \omega(k_j)$. Выберем эти волны так, чтобы волновые числа и частоты были связаны условиями

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \tag{6}$$

которые назовем условиями трехволнового резонанса.

Вывод укороченных уравнений для амплитуд волн будем строить в рамках асимптотического метода, который был рассмотрен в предыдущих лекциях для решения задачи о резонансном возбуждении волны внешним источником. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд будем строить в виде

$$\frac{\partial a_j}{\partial \tau} = F_j^{(1)} + \varepsilon F_j^{(2)} + \dots. \tag{7}$$

где $F_j^{(1)},\dots$ − неизвестные функционалы, подлежащие определению. Подставляем разложение (5) в (4) и приравниваем члены при различных степенях ε. В главном порядке (члены $\sim \varepsilon^0$) получаем тождества, поскольку $D(\omega_j, k_j) = 0$. При подстановке (5) в правые части (4) каждая нелинейная функция принимает вид разложения по ε:

$$f_{1,2} = f_{1,2}^{(0)} + \varepsilon f_{1,2}^{(1)} + \dots \tag{8}$$

Рассмотрим подробнее нелинейность $f_1 \sim u^2$. При подстановке главной части разложения (5) она дает суперпозицию «комбинационных» гармоник, которые имеют суммарные и разностные волновые числа и частоты:

$$f_1^{(0)} \sim \left(u^{(0)}\right)^2 = \left(2a_1a_2 \mathrm{e}^{i(k_1+k_2)x - i(\omega_1+\omega_2)t} + k.c. + \dots\right) + \tag{9}$$

$$+\left(2a_3a_1^* \mathrm{e}^{i(k_3-k_1)x-i(\omega_3-\omega_1)t} + 2a_3a_2^* \mathrm{e}^{i(k_3-k_2)x-i(\omega_3-\omega_2)t} + 2a_2a_1^* \mathrm{e}^{i(k_2-k_1)x-i(\omega_2-\omega_1)t} + k.c.\dots.\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{3} a_j^2 \mathrm{e}^{2ik_jx-2i\omega_jt} + k.c. + 2\sum_{j=1}^{3}\left|a_j\right|^2 .$$

Первые два члена в круглых скобках содержат произведения гармоник с различными частотами и волновыми числами, третье и четвертое − с одинаковыми. Нетрудно видеть, что при выполнении условий резонанса (6) в сумме (9) имеются слагаемые, показатели экспонент которых полностью совпадают показателями для собственных волн (k_j, ω_j). Согласно, (3) именно они способны вызвать накапливающиеся изменения амплитуд a_j. Кроме того, в отличие от рассмотренной нами ранее линейной задачи о возбуждении волн внешним источником, в (9) присутствуют также слагаемые с показателями экспонент, не совпадающими с собственными волнами. Таким образом, нелинейность в главном порядке по ε можно представить в виде суммы гармоник двух типов:

$$f^{(0)} = \underbrace{\sum_j \hat{f}_j^{(0)}(\tau,\chi)\,\mathrm{e}^{ik_jx-i\omega_jt}}_{D(\omega_j,k_j)=0} + \underbrace{\sum_m \hat{f}_m^{(0)}(\tau,\chi)\,\mathrm{e}^{ik_mx-i\omega_mt}}_{D(\omega_m,k_m)\neq 0} + k.c. \tag{10}$$

Применительно к данной задаче $f^{(0)} = f_1^{(0)}$ или $f_2^{(0)}$. В первой сумме объединены слагаемые, волновые числа и частоты которых связаны дисперсионным соотношением, во второй − которые не связаны. В порядке ε для первой добавки $u^{(1)}$ получаем линейное уравнение с разложением (10) в правой части. Поэтому $u^{(1)}$ также можно представить в виде суммы гармоник двух указанных типов:

$$u^{(1)} = \underbrace{\sum_j \hat{u}_j^{(1)}(\tau,\chi)\,\mathrm{e}^{ik_jx-i\omega_jt}}_{D(\omega_j,k_j)=0} + \underbrace{\sum_m \hat{u}_m^{(1)}(\tau,\chi)\,\mathrm{e}^{ik_mx-i\omega_mt}}_{D(\omega_m,k_m)\neq 0} + k.c. \tag{11}$$

Аналогично записывается добавка $I^{(1)}$. Подставим (10), (11) в (4) и воспользуемся для определения действия функций операторов $\hat{\omega}$ и $\hat{k}$ правилами, полученными на предыдущих лекциях. Это приводит к следующему уравнению для амплитуд гармоник добавки $u^{(1)}$:

$$iD\left(\omega_j, k_j)\right)\hat{u}_j^{(1)} = \hat{Q}_j, \text{ где} \tag{12}$$

$$\hat{Q}_j = \begin{cases} \dfrac{ik_j}{L(\omega_j)}\left(\hat{f}_2^{(0)}\right)_j - i\omega_j\left(\hat{f}_1^{(0)}\right)_j + \left(\left.\dfrac{\partial D}{\partial \omega}\right|_j F_j^{(1)} - \left.\dfrac{\partial D}{\partial k}\right|_j \dfrac{\partial a_j}{\partial \chi}\right), & \text{если } D\left(\omega_j, k_j\right) = 0 \\ \dfrac{ik_j}{L(\omega_j)}\left(\hat{f}_2^{(0)}\right)_j - i\omega_j\left(\hat{f}_1^{(0)}\right)_j, & \text{если } D\left(\omega_j, k_j\right) \neq 0 \end{cases}$$

Амплитуды добавок, волновые числа и частоты которых не связаны дисперсионным соотношением, ограничены и находятся явно

$$\hat{u}_m^{(1)} = -i\hat{Q}_m \big/ D\left(\omega_m, k_m\right), \text{ если } D\left(\omega_m, k_m\right) \neq 0\,. \tag{13}$$

Условие существования (ограниченности) добавок с собственными частотами и волновыми числами ($\left|\hat{u}_m^{(1)}\right| \neq \infty$) имеет вид $\hat{Q}_j = 0$. Отсюда однозначно находится неизвестный функционал $F_j^{(1)}$ в разложении (7). Подставляя этот функционал в (7), получаем при $j = 1, 2, 3$ уравнения первого приближения для комплексных амплитуд волн, входящих в главную часть разложения (5):

$$\begin{aligned} &\left(D'_\omega\right)_1\left(\dot{a}_1 + v_{1,2}a'_{1,2}\right) = \sigma a_2^* a_3\,, \\ &\left(D'_\omega\right)_2\left(\dot{a}_2 + v_2 a'_2\right) = \sigma a_1^* a_3 \qquad \sigma = \varepsilon\left(\alpha - \beta\frac{k_1 k_2 k_3}{\omega_1\omega_2\omega_3 L_1 L_2 L_3}\right), \\ &\left(D'_\omega\right)_3\left(\dot{a}_3 + v_3 a'_3\right) = -\sigma a_1 a_2\,, \end{aligned} \tag{14}$$

где $v_j = \left(-D'_k \big/ D'_\omega\right)_j$ – групповые скорости волн, $L_j = L(\omega_j)$. Здесь и далее приняты обозначения $\dot{a} = \partial a/\partial t$ и $a' = \partial a/\partial x$. В правую часть каждого уравнения (14) вошли только те комбинационные гармоники нелинейных членов, которые удовлетворяют условиям резонанса с соответствующей волной a_j. Это и есть классические уравнения резонансного взаимодействия спектрально узких волновых пакетов или модулированных волн в консервативных средах.

Как понимать уравнения (14)? Левые части (14) описывают групповое распространение огибающей. Если бы нелинейность отсутствовала, огибающая каждой волны переносилась бы независимо со своей групповой скоростью. Чтобы пояснить структуру правых частей в (14), предположим, что справа стоят не амплитуды волн, а полные поля, т.е. восстановим осциллирующие экспоненты, исчезнувшие при усреднении. Для этого в правой части третьего уравнения следует сделать замену

$$a_1 a_2 \to a_1 a_2 \exp\left[i(\underbrace{k_1 + k_2}_{k_3})x - i(\underbrace{\omega_1 + \omega_2}_{\omega_3})t\right]. \tag{15}$$

С учетом условий резонанса (6) видно, что волна a_3 возбуждается гармоникой нелинейности, показатель экспоненты которой совпадает с показателем экспоненты $\exp\left(ik_3 x - i\omega_3 t\right)$ волны a_3. Именно этот «нелинейный источник» включает в себя произведение амплитуд $a_1 a_2$. Аналогично можно «разобрать» правые части двух других уравнений (14).

Поскольку среда консервативна, полезно перейти к записи уравнений (14) через энергетические характеристики. Для этого введем понятие числа квазичастиц в волне по аналогии с формулой квантовой механики для энергии в многоуровневой системе. В квантовой механике энергия полей квантуется, т.е. принимает дискретные значения: $W = \hbar\omega N$, где $\hbar$ – постоянная Планка, N – число заполнения энергетического уровня или число квазичастиц поля (формула дана в случае больших чисел заполнения – $N >> 1$). Следуя аналогии с квантовой механикой, введем формально число квазичастиц в волне:

$$N=\left|\frac{W}{\omega}\right|\equiv q\left|a\right|^2>0. \qquad (16)$$

где q – положительный коэффициент пропорциональности. Тогда уравнения (14) перепишутся в виде

$$s_{1,2}q_{1,2}\left(\dot{a}_{1,2}+v_{1,2}a'_{1,2}\right)=\sigma a^*_{2,1}a_3, \qquad (17)$$
$$s_3q_3\left(\dot{a}_3+v_3a'_3\right)=-\sigma^*a_1a_2.$$

где $s_j=\operatorname{sign}\left(\frac{W}{\omega}\right)_j$. При положительных частотах ($\omega_j>0$) s_j совпадает со знаком энергии j-ой волны, поскольку $s_j=\operatorname{sign}\left(W_j\right)$ и $W_j=s_j\omega_jN_j$. Далее без ущерба общности будем считать ω_j положительными.[1] Задание положительных частот однозначно устанавливает их иерархию в (6): $\omega_3>\omega_{1,2}$. Волну $\left(\omega_3,k_3\right)$, которая имеет наибольшую частоту, далее будем условно называть высокочастотной, а две другие – низкочастотными.

Если дисперсионная функция определена так, что плотность энергии записывается в виде $W=\omega\frac{\partial D}{\partial\omega}\left|a\right|^2$, то $q=\left|\frac{\partial D}{\partial\omega}\right|$ и $s_j=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial D}{\partial\omega}\right)_j$. Подчеркнем, что три последние формулы справедливы только при специальном выборе дисперсионной функции, тогда как определение (16) и вид уравнения(17) не зависят от того, как введено D.

Заметим, что возможен и другой подход, когда знак энергии отождествляется со знаком частоты и на этой основе вводится понятие квантов с отрицательной энергией (в силу свойств симметрии решений дисперсионного уравнения без ущерба общности всегда можно выбрать знаки частот в главной части решения совпадающими со знаками энергии волн). Положительный момент такого подхода состоит в том, законы сохранения будут выполняться в элементарных актах распада – слияния квантов (см. далее).

Можно показать, что уравнения (17) есть общая запись уравнений взаимодействия трех волн с положительными частотами в консервативных средах с учетом знаков энергии волн. Обоснование можно дать в рамках лагранжева представления исходных уравнений среды. В последнем уравнении (17) комплексно сопряженное σ не получается из приведенного вывода, поскольку коэффициенты получились вещественными. Однако необходимость данного обобщения вполне очевидна. Действительно, если в уравнениях (17) с вещественным σ сделать преобразование амплитуд, полагая $a_{нов.}=ia$, получим для $a_{нов.}$ уравнения (17) с новым комплексным коэффициентом $\sigma_{нов.}=i\sigma$. Ясно также, что такое преобразование амплитуд могло бы появиться и естественным путем, например, вследствие выбора другой нормировки собственных векторов. Поэтому общая запись уравнений для консервативных сред содержит σ^* в последнем уравнении.

Резонансное взаимодействие трех пространственно-однородных волн во времени. Соотношения Мэнли-Роу.

Запись уравнений в виде (17) удобна тем, что позволяет выделить законы сохранения в явном виде. Рассмотрим взаимодействие во времени пространственно однородных волн ($\partial a/\partial x=0$). В этом случае получим уравнения в обыкновенных производных по времени:

$$s_{1,2}q_{1,2}\dot{a}_{1,2}=\sigma a^*_{2,1}a_3,\qquad s_3q_3\dot{a}_3=-\sigma^*a_1a_2. \qquad (18)$$

Какие процессы реально описывает данная модель?

1. Это элементарный процесс взаимодействия мод свободного пространства (здесь моды это пространственные фурье-гармоники $\exp(ikx)$, имеющие сплошной спектр значений

[1] Частоты волн в главной части решения всегда можно выбрать положительными в силу свойств симметрии решений дисперсионного уравнения, отмеченных на первой лекции

k). Поскольку возмущения обычно можно разложить в ряд или интеграл Фурье, свойства элементарного процесса желательно знать, чтобы прогнозировать более сложные ситуации.

2. Случай неоднородных волн, когда производной по координате в (17) можно пренебречь. Если ввести характерный масштаб огибающей l, то, например, из последнего уравнения (17) следует оценка
$$\left|v_3 \frac{a_3}{l}\right| << \left|\frac{\partial a_3}{\partial t}\right| \sim \left|\sigma_3 a_1 a_2\right|, \quad \text{откуда} \quad \gamma_{нел.} = \left|\frac{1}{a_3}\frac{\partial a_3}{\partial t}\right| \sim \left|\frac{\sigma_3 a_1 a_2}{a_3}\right| >> \frac{v_3}{l},$$
где $\gamma_{нел.}$ – характерный инкремент (декремент) нелинейного взаимодействия. Например, если $a \sim \exp(\Gamma t)$, получим $\gamma_{нел.} \sim |\Gamma|$. Если ограничится ситуацией, когда все амплитуды – величины одного порядка, то $\gamma_{нел.} \sim |\sigma_3 a|$. Теперь ясно, что смысл полученного условия в том, что скорость роста или затухания из-за нелинейного взаимодействия должна превосходить скорость изменения a из-за группового распространения огибающей. В конечном счете все зависит от соотношения амплитуд волн, масштаба огибающей и групповой скорости.

3. Взаимодействие мод в кольцевом резонаторе. Уравнения принимают вид (17), если спектр волновых чисел достаточно разрежен. Количественно это сводится к условию $v_g \Delta k_M >> \gamma_{нел.}$, где Δk_M – расстояние между модами резонатора по волновому числу. В этом случае взаимодействуют изолированные моды, поля которых однородны по x. Аналогичные «временные» уравнения можно получить для обычного резонатора с отражением от стенок, но в этом случае потребуется специальная процедура, чтобы учесть влияние отраженных волн (т.е уравнения для амплитуд мод должны выводится с учетом полной структуры мод, включающей отраженные волны).

4. Наконец, ясно то стационарная задача ($\partial a / \partial t = 0$) математически полностью равносильна «временной» при одинаковых знаках групповых скоростей v_j.

Умножим каждое из уравнений (18) на a_j^* и сложим результат с комплексно сопряженным выражением. В результате получим
$$s_{1,2} q_{1,2} \frac{\partial \left|a_{1,2}\right|^2}{\partial t} = \sigma a_2^* a_1^* a_3 + k.c., \quad s_3 q_3 \frac{\partial \left|a_3\right|^2}{\partial t} = -\left(\sigma a_2^* a_1^* a_3 + k.c.\right).$$
Из этих уравнений следуют интегралы движения, называемые соотношениями Мэнли-Роу
$$s_1 N_1 + s_3 N_3 = Const_1, \quad s_2 N_2 + s_3 N_3 = Const_2, \quad s_1 N_1 - s_2 N_2 = Const_3. \tag{19}$$
При этом независимы только два из приведенных интегралов. Кроме того, с учетом условий резонанса (6) из (19) получаются законы сохранения полной энергии и импульса для резонансного взаимодействия трех волн во времени:
$$\begin{aligned} s_1\omega_1 N_1 + s_2\omega_2 N_2 + s_3\omega_3 N_3 = Const_4 \\ s_1 k_1 N_1 + s_2 k_2 N_2 + s_3 k_3 N_3 = Const_5 \end{aligned} \tag{20}$$
Отметим, что соотношения Мэнли-Роу можно записать и для волновых пакетов. Считая поля локализованными, умножим j-тое уравнение (17) на a_j^*, сложим результат с комплексно сопряженным выражением и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. Это приводит к соотношениям Мэнли-Роу (19) для интегральных чисел квантов $N_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_j |a|^2 dx$.