Диссипативный предел уравнения Гинзбурга –Ландау

Диссипативным пределом КУГЛ (или вещественным уравнением Гинзбурга– Ландау) называется уравнение с чисто вещественными коэффициентами

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a + \Delta a - |a|^2 a \tag{1}$$

(в КУГЛ общего вида следует положить $c = 0$, $b_1 = b_2 = b = 0$). В уравнении (1) отсутствуют нелинейный сдвиг частоты и дисперсионное слагаемое. Оно описывает эффекты неустойчивости, нелинейного затухания и диффузии огибающей волнового пакета. Важная особенность уравнения (1) состоит в том, что оно не содержит параметров.

Покажем, что уравнение (1) является градиентным. Для градиентного уравнения можно ввести функционал обобщенной свободной энергии (в математической теории устойчивости он называется функционалом Ляпунова). Покажем, что функционал Ляпунова для уравнения (1) имеет вид

$$\begin{gathered} F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-|a|^2 + \frac{1}{2}|a|^4 + |\nabla a|^2 \right] dxdy \equiv \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[-aa^* + \frac{1}{2}a^2 a^{*2} + (\nabla a \nabla a^*) \right]}_{U} dxdy \end{gathered} \tag{2}$$

Произведем вариацию комплексной функции a с «закрепленными краями»:

$$a = a_0 + \delta a, \quad \delta a \to 0 \quad \text{при} \quad |x|,|y| \to \infty . \tag{3}$$

Вычисляя вариацию с учетом (3), получим

$$\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U}{\partial a}\delta a + \frac{\partial U}{\partial \nabla a}\delta(\nabla a) + \frac{\partial U}{\partial a^*}\delta a^* + \frac{\partial U}{\partial \nabla a^*}\delta(\nabla a^*) \right] dxdy \tag{4}$$

Слагаемые в подынтегральном выражении, содержащие вариации производных от a, преобразуем с помощью интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U}{\partial \nabla a}\nabla(\delta a) \right] dxdy = \frac{\partial U}{\partial \nabla a}\delta a \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\nabla \cdot \frac{\partial U}{\partial \nabla a} \right] \delta a \, dxdy \tag{5}$$

Первый член в (5) обращается в ноль с учетом условия закрепленных концов (3). После этого вариация функционала (4) принимает вид

$$\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \underbrace{\left[\frac{\partial U}{\partial a} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial \nabla a} \right) \right]}_{\frac{\delta F}{\delta a}} \delta a + \underbrace{\left[\frac{\partial U}{\partial a^*} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial \nabla a^*} \right) \right]}_{\frac{\delta F}{\delta a^*}} \delta a^* \right\} dxdy \tag{6}$$

Коэффициенты при δa и δa^* в подынтегральном выражении (6) называются функциональными производными и обозначаются как $\dfrac{\delta F}{\delta a}$ и $\dfrac{\delta F}{\delta a^*}$ (формула (6) дает правило вычисления вариационной производной. Общее определение можно найти в литературе по функциональному анализу). С учетом (6) и (2) уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta a^*} \tag{7}$$

Уравнения, для которых возможно представление вида (7) называются градиентными.

Градиентные уравнения обладают важным свойством, относящимся к поведению функционала Ляпунова во времени. Дифференцируя левую и правую части (2) по времени и выполняя интегрирование по частям (так же, как это делалось выше), получим

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial a} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial \nabla a} \right) \right] \frac{\partial a}{\partial t} + k.c. \right\} dxdy \tag{8}$$

Замечая, что под интегралом в квадратных скобках стоит вариационная производная и используя (7), находим

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta F}{\delta a} \frac{\partial a}{\partial t} + k.c. \right\} dxdy = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial a}{\partial t} \right|^2 dxdy \le 0 \tag{9}$$

Поскольку интеграл в правой части уравнения (9) является отрицательной величиной либо нулем, функционал Ляпунова непрерывно убывает до тех пор, пока не достигнет своего минимального значения. При этом $\partial a / \partial t = 0$, т.е. реализуется одно из стационарных решений уравнения ГЛ (1). При шумовых начальных условиях наиболее вероятным является достижение стационарного решения с наименьшим значением функционала Ляпунова.

Таким образом, в градиентных системах всегда устанавливается одно из стационарных состояний. Нестационарные режимы являются переходными и обычно содержат движущиеся фронты, разделяющие области структур поля, близких к стационарным.