

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Радиофизический факультет
Кафедра теории колебаний

Отчет по лабораторной работе:

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Выполнили: студенты 430 группы
Воробьёв Артём
Зайцев Юрий

Проверил: **Мотова Марина Ильинична**

Нижний Новгород
2006 год

Содержание

1	Теоретическая часть	3
1.1	Введение	3
1.2	Математическое описание фильтров из цепочек Т-образных звеньев .	3
1.3	Собственные колебания в электрических фильтрах	4
1.4	Вынужденные колебания в электрических фильтрах	6
1.5	Конкретные схемы фильтров	7
1.5.1	Фильтр низкой частоты (ФНЧ)	7
1.5.2	Фильтр высокой частоты (ФВЧ)	7
1.5.3	Полосовой фильтр (ПФ)	8
2	Практическая часть	9
2.1	Фильтр низкой частоты (ФНЧ)	9
2.2	Фильтр высокой частоты (ФВЧ)	9
2.3	Полосовой фильтр (ПФ)	10
2.4	Амплитудно- и фазо-частотные характеристики фильтров	11
2.5	Формы сигнала на выходе с ФВЧ и ПФ	12

1 Теоретическая часть

1.1 Введение

Целью настоящей работы является изучение на примере электрических фильтров свойств линейных дискретных систем со многими степенями свободы. В качестве фильтров используются цепочки из последовательно соединенных друг с другом идентичных звеньев (четыреполюсников). Такая система, как система с пространственной дисперсией, обладает избирательными свойствами в определенной области частот. В зависимости от того, какова область частот, в которой колебания пропускается практически без искажений, фильтры подразделяются на фильтры низких и высоких частот (ФНЧ и ФВЧ) и полосовые фильтры (ПФ).

Четыреполюсники, представляющие звенья фильтра, состоят из пассивных элементов: L , C и R . Мы будем рассматривать только консервативные фильтры, состоящие из чисто реактивных элементов - так называемые LC -фильтры. Общая схема фильтра приведена на Рис. 1, где введены следующие обозначения: $Z(p)$ - операторный импеданс, $g(p)$ - операторная проводимость, $Z_0(p)$ - операторный импеданс на входе фильтра, $Z_n(p)$ - операторный импеданс на выходе фильтра. Из принципиальной схемы фильтра видно, что фильтры могут быть разбиты на так называемые Г-образные, П-образные, Т-образные звенья-четыреполюсники. Заметим, что такое деление чисто условное.

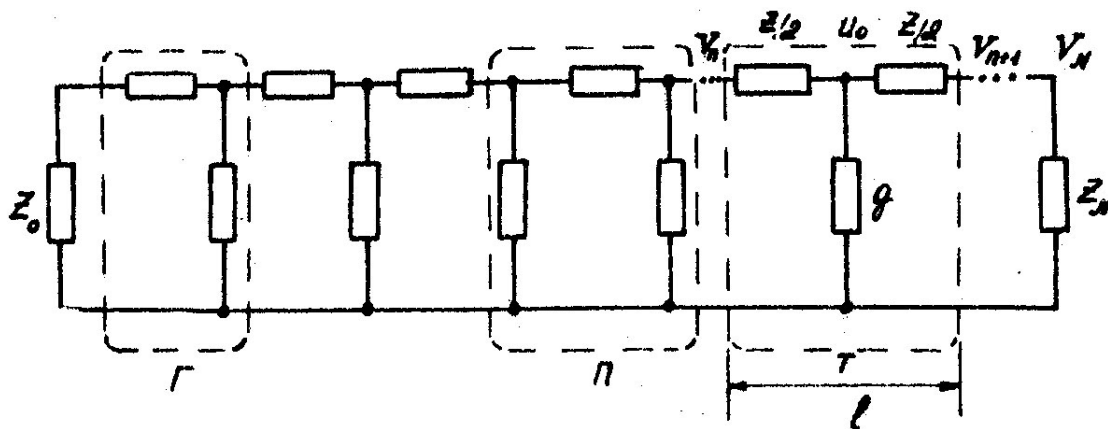


Рис. 1: Общий вид цепочки фильтров

1.2 Математическое описание фильтров из цепочек Т-образных звеньев

Изучим явления, происходящие в фильтрах, на примере фильтра, состоящего из Т-образных звеньев и составим для него уравнения. На основании законов Кирхгофа

для комплексных амплитуд напряжений и токов будем иметь:

$$\begin{aligned} V_n - U_0 &= \frac{Z}{2} I_n \\ U_0 - V_{n+1} &= \frac{Z}{2} I_{n+1} \\ gU_0 &= I_n - I_{n+1} \end{aligned} \quad (1)$$

Исключая из этих уравнений U_0 и разрешая их относительно переменных V_{n+1} и I_{n+1} , получим:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= a_{11}(p)V_n - a_{12}(p)I_n \\ I_{n+1} &= -a_{21}V_n + a_{22}(p)I_n \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$a_{11} = 1 + \frac{1}{2}gZ, \quad a_{12} = Z\left(1 + \frac{1}{4}gZ\right), \quad a_{21} = g, \quad a_{22} = 1 + \frac{1}{2}gZ. \quad (3)$$

Система (2) является системой уравнений в конечных разностях. При определенных условиях (размеры ячейки малы по сравнению с длиной волны) предельным переходом они могут быть сведены к дифференциальным уравнениям в частных производных, которыми описываются распределенные системы.

Для “взаимных” четырехполюсников, т.е. четырехполюсников, для которых выполняются условия

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 1, \quad (4)$$

соблюдается теорема взаимности. Это означает, что если вход и выход четырехполюсника поменять местами, то получим одинаковые результаты. Как нетрудно установить, теорема взаимности соблюдается для четырехполюсника, изображенного на Рис. 1.

1.3 Собственные колебания в электрических фильтрах

Собственные колебания в цепочке, составленной из N одинаковых Т-элементов, описываются системой уравнений (2) при следующих граничных условиях:

$$V_0 = -I_0Z_0, \quad V_N = Z_N I_N. \quad (5)$$

Будем искать решение системы уравнений (2) в виде:

$$V_n = Ae^{n\theta}, \quad I_n = Be^{n\theta}, \quad (6)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, N$ – номер ячейки. Подставляя решение (6) в уравнение (2) и сокращая на множитель $e^{n\theta}$, получим:

$$\begin{aligned} A(e^\theta - a_{11}) + Ba_{12} &= 0 \\ Aa_{21} + B(e^\theta - a_{22}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Условием существования нетривиального решения системы уравнений (7) ($A \neq 0$, $B \neq 0$) является равенство нулю детерминанта этой системы. Используя при это ещё условие взаимности получим:

$$(e^\theta - a_{11})^2 = a_{11}^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cosh \theta = a_{11}. \quad (8)$$

Т.к. $\cosh \theta$ – четная функция, для θ будем иметь два значения, отличающихся только знаком, что значит, что в системе будет существовать как прямая, так и обратная волна, поскольку общее решение системы (2) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= A_1 e^{-n\theta} + A_2 e^{n\theta} \\ I_{n+1} &= B_1 e^{-n\theta} + B_2 e^{n\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

Величина θ , носящая название постоянной распространения является в общем случае комплексной: $\theta = l(\sigma + jk)$. Действительная часть θ представляет декремент (или инкремент) волны, а мнимая - изменение фазы волны по координате. Поэтому удобно внести обозначение $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ – длина волны. Тогда lk есть число радиан, на которое возрастает фаза при переходе от n -ой ячейки к $(n + 1)$ -ой.

Пользуясь уравнением (7), можно связать постоянные коэффициенты A_i и B_i ($i = 1, 2$):

$$B_1 = G_x A_1, \quad B_2 = -G_x A_2, \quad G_x = \left(\frac{a_{21}}{a_{12}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Тогда общее решение для внутренних звеньев запишется в виде:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= A_1 e^{-n\theta} + A_2 e^{n\theta} \\ I_{n+1} &= G_x (A_1 e^{-n\theta} - A_2 e^{n\theta}) \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь, подставляя в (11) граничные условия (5), получим уравнение для нахождения A_1 и A_2 , для ненулевых значений которых получаем условие:

$$\Delta = 1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2N\theta}, \quad (12)$$

где $\Gamma_0 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{-(1 - Z_0 G_x)}{1 + Z_0 G_x}$ – коэффициент отражения от начала фильтра, а $\Gamma_N = \frac{A_2 e^{N\theta}}{A_1 e^{-N\theta}} = \frac{-(1 - Z_N G_x)}{1 + Z_N G_x}$ – коэффициент отражение от конца фильтра соответственно.

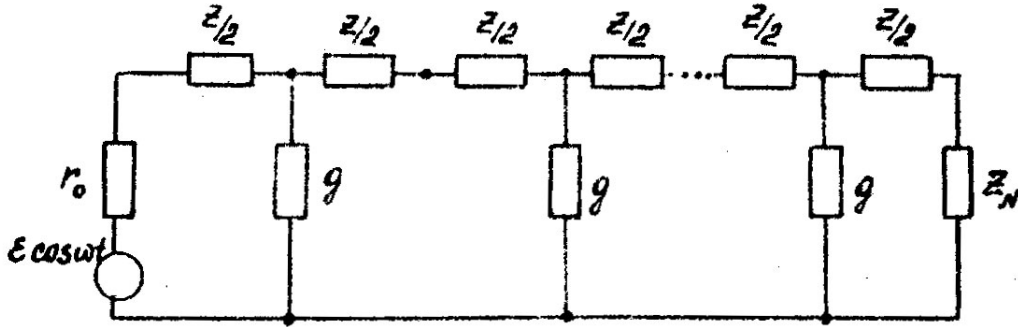


Рис. 2: Фильтр из Т-образных звеньев, r_0 – внутреннее сопротивление источника

1.4 Вынужденные колебания в электрических фильтрах

Рассмотрим вынужденные колебания в фильтре, изображенном на Рис. 2, составленном из Т-образных звеньев, при действии на входе фильтра синусоидальной ЭДС ($\varepsilon = \text{Re}[\varepsilon_0 e^{i\omega t}]$). Уравнения для амплитуд напряжений и токов в n -ой ячейке фильтра останутся теми же (2), но граничные условия будут иметь вид:

$$V_0 = \varepsilon - r_0 I_0, \quad V_N = Z_N I_N. \quad (13)$$

Решение системы уравнений (2) будет иметь вид (11), а постоянные A_1 и A_2 определяются из граничных условий (13). Таким образом, амплитуды напряжений и токов для n -ой ячейки будут иметь вид:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1 - \Gamma_0}{2} \frac{\varepsilon e^{-n\theta}}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2N\theta}} [1 + \Gamma_N e^{-2(N-n)\theta}] \\ I_n &= \frac{1 - \Gamma_0}{2} \frac{\varepsilon e^{-n\theta}}{1 - \Gamma_0 \Gamma_N e^{-2N\theta}} G_x [1 + \Gamma_N e^{-2(N-n)\theta}] \end{aligned} \quad (14)$$

Длинные линии, и, в частности, дискретные цепочки (фильтры) широко используются в различных радиотехнических устройствах в качестве линий задержки. На выходе фильтра синусоидальная составляющая сигнала имеет вид:

$$U_N(t) = V_N e^{j\omega t} = A_1 e^{-N\theta} e^{j\omega t} + A_2 e^{N\theta} e^{j\omega t}.$$

Тогда представив входной сигнал в виде спектра в пределах полосы частот $\Omega + \Delta\omega$ и разложив нелинейную функцию $k = k(\omega)$ в степенной ряд по степеням $\Delta\omega$ с центром разложения при $\omega = \Omega$, после отбрасывания всех, кроме линейного по $\Delta\omega$ членов получим сигнал на выходе для прямой волны:

$$V_N = A_1 e^{j(\omega t - Nlk)} \simeq A_1 e^{j[\Omega t - Nlk(\Omega)]} e^{j(t - Nl \frac{dk}{d\omega}) \Delta\omega}.$$

Отсюда видно, что величина $l \frac{dk}{d\omega}$ имеет смысл *задержки сигнала на выходе на одно звено фильтра*. Таким образом, сигнал будет запаздывать не искажаясь только в том случае, если его спектр лежит в полосе прозрачности фильтра и укладывается в диапазон частот, для которого фазо-частотную характеристику можно считать линейной.

1.5 Конкретные схемы фильтров

1.5.1 Фильтр низкой частоты (ФНЧ)

Фильтр низкой частоты (см. Рис. 3) служит для пропускания колебаний низкой частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{cp}$.

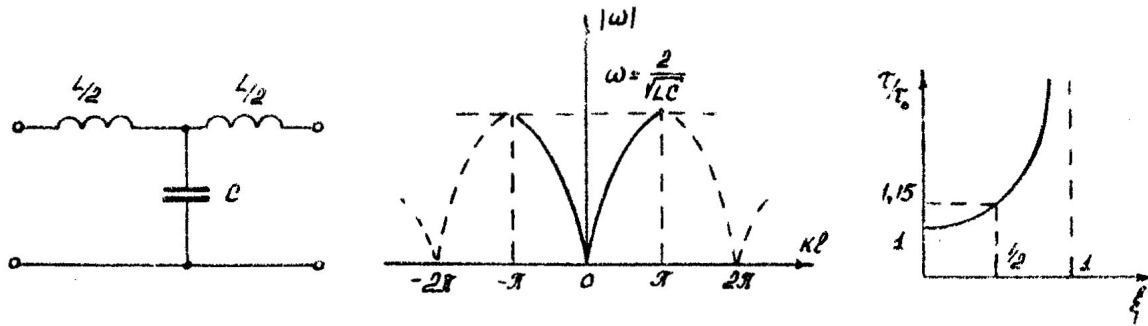


Рис. 3: Фильтр низкой частоты из Т-образных звеньев: схема, дисперсионная характеристика и зависимость времени задержки от безразмерного параметра ξ ($\xi^2 = \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}$)

Дисперсионное уравнение и выражение для времени задержки для ФНЧ имеет вид соответственно

$$\omega^2 = 2(LC)^{-1/2}(1 - \cos kl) \quad \text{и} \quad \tau = \frac{d(kl)}{d\omega} = \frac{2}{\omega_{cp} \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (15)$$

1.5.2 Фильтр высокой частоты (ФВЧ)

Фильтр высокой частоты, изображенный на Рис. 4 нужен для того, чтобы отфильтровать низкие частоты (ниже ω_{cp} для фильтра).

Дисперсионное уравнение и выражение для времени задержки для ФВЧ имеет вид соответственно

$$\omega^2 = \frac{1}{2(LC)(1 - \cos kl)} \quad \text{и} \quad \tau = \left| \frac{d(kl)}{d\omega} \right| = \frac{1}{\omega_{cp} \xi \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (16)$$

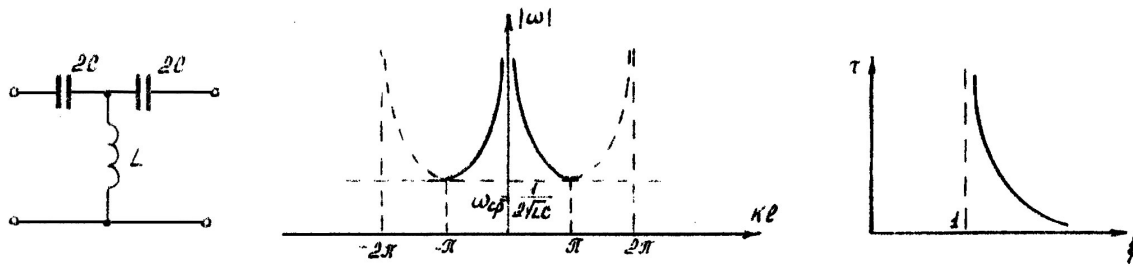


Рис. 4: Высокочастотный фильтр из Т-образных звеньев: схема, дисперсионная характеристика и зависимость времени задержки от безразмерного параметра ξ

1.5.3 Полосовой фильтр (ПФ)

Полосовой фильтр (см. Рис. 5), как следует из названия, пропускает сигнал лишь в определенной полосе частот. Дисперсионное уравнение для фильтра имеет вид

$$f(\omega^2) = \frac{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)}{4\omega^2 L_2 C_1} = \sin^2 \frac{lk}{2}. \quad (17)$$

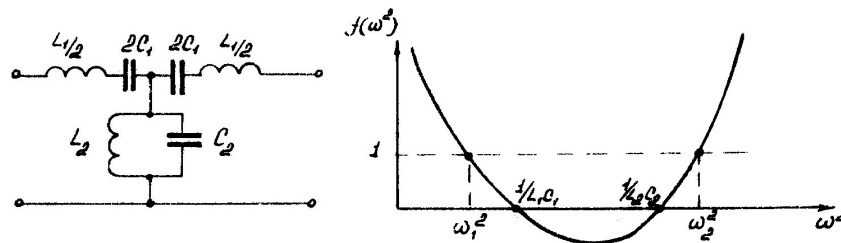


Рис. 5: Полосовой фильтр из Т-образных звеньев: схема и дисперсионное уравнение

2 Практическая часть

2.1 Фильтр низкой частоты (ФНЧ)

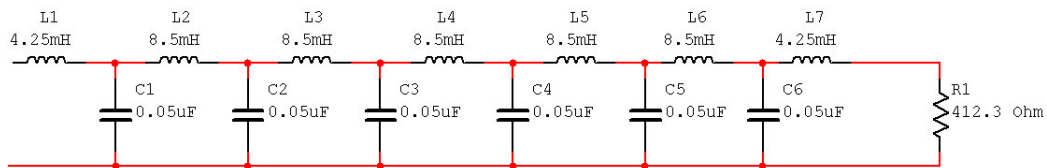


Рис. 6: Схема использованного НЧ фильтра из 6 Т-образных звеньев

Параметры использованного фильтра: $\nu_{зр} = 15.44$ кГц, $R_в = 412.3$ Ом, $C = 0.05$ мкФ, $L = 8.5$ мГн, число звеньев $N = 6$, тип звеньев – Т-образные звенья.

Число звеньев	Время задержки, мкс
6	180
5	160
4	140
3	120
2	100
1	60
Среднее (на одно звено):	41.2

Таблица 1: Время задержки для сигнала на выходе ФНЧ

Амплитудно- и фазо-частотные характеристики этого фильтра изображены на Рис. 9 и Рис. 10 соответственно.

2.2 Фильтр высокой частоты (ФВЧ)

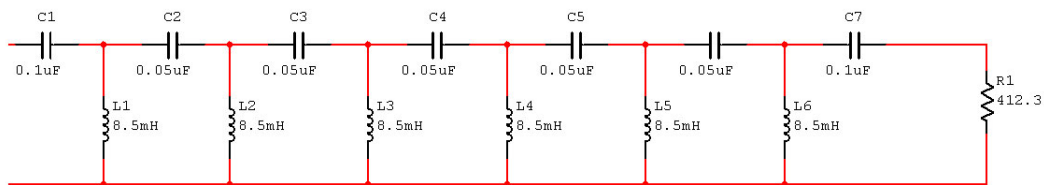


Рис. 7: Схема использованного ВЧ фильтра из 6 Т-образных звеньев

Параметры использованного фильтра: $\nu_{zp} = 3.86$ кГц, $R_6 = 412.3$ Ом, $C = 0.05$ мкФ, $L = 8.5$ мГн, число звеньев $N = 6$, тип звеньев – Т-образные звенья.

Амплитудно- и фазо-частотные характеристики этого фильтра изображены на Рис. 11 и Рис. 12 соответственно.

Форма прямоугольного импульса после прохождения фильтра приведена на Рис. 15.

2.3 Полосовой фильтр (ПФ)

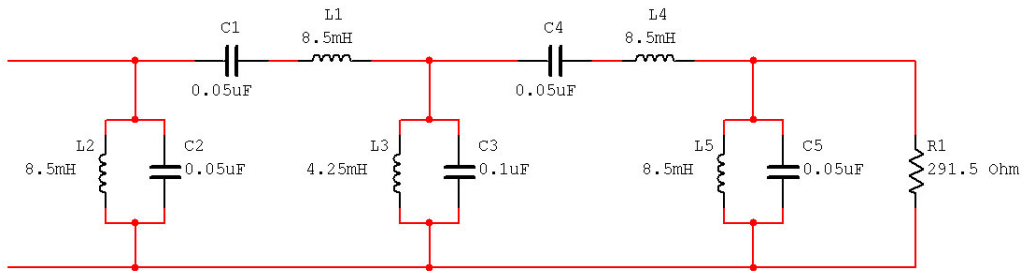


Рис. 8: Схема использованного полосового фильтра из 2 П-образных звеньев

Параметры использованного фильтра: $\nu_{zp}^1 = 3.99$ кГц, $\nu_{zp}^2 = 14.90$ кГц, $R_6 = 291.5$ Ом, $C_1 = 0.05$ мкФ, $L_1 = 8.5$ мГн, $C_2 = 0.1$ мкФ, $L_2 = 4.25$ мГн, число звеньев $N = 2$, тип звеньев – П-образные звенья.

Амплитудно- и фазо-частотные характеристики этого фильтра изображены на Рис. 13 и Рис. 14 соответственно.

Форма прямоугольного импульса после прохождения фильтра приведена на Рис. 16.

2.4 Амплитудно- и фазо-частотные характеристики фильтров

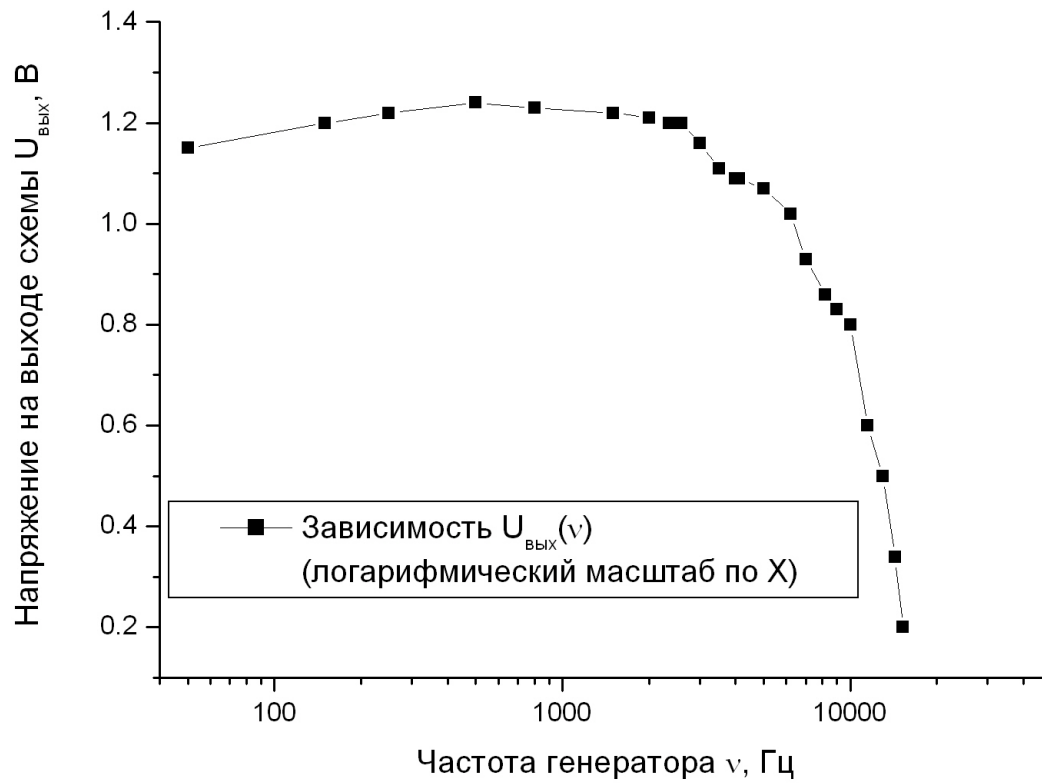


Рис. 9: Амплитудно-частотная характеристика для фильтра низких частот

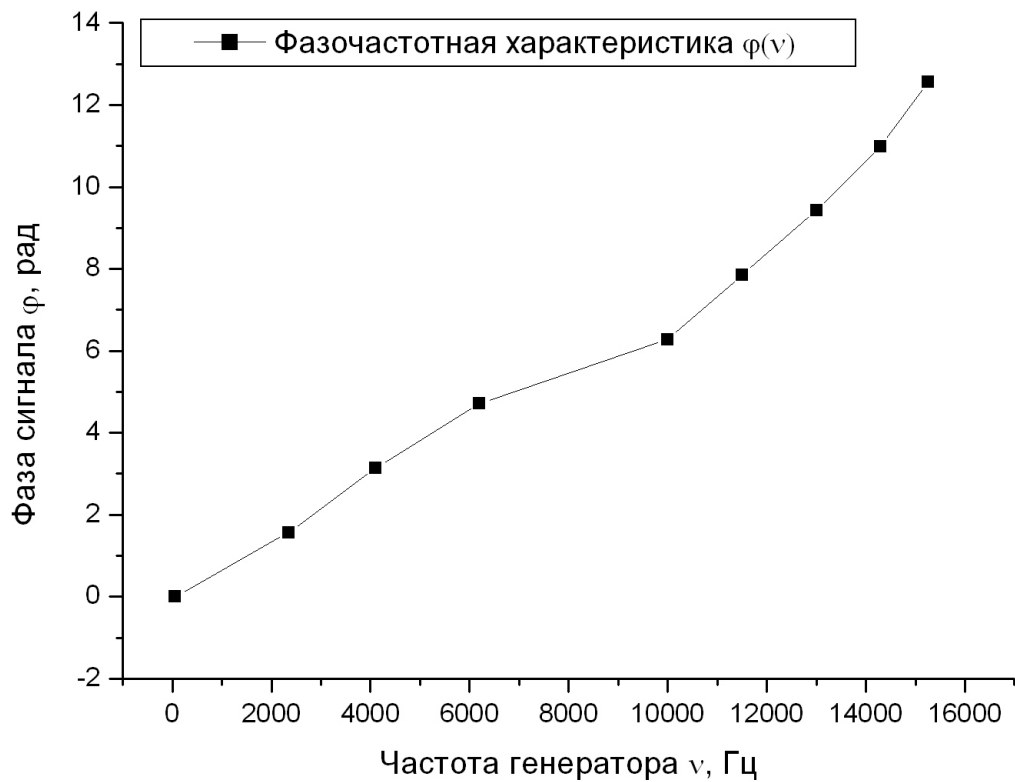


Рис. 10: Фазо-частотная характеристика для фильтра низких частот

2.5 Формы сигнала на выходе с ФВЧ и ПФ

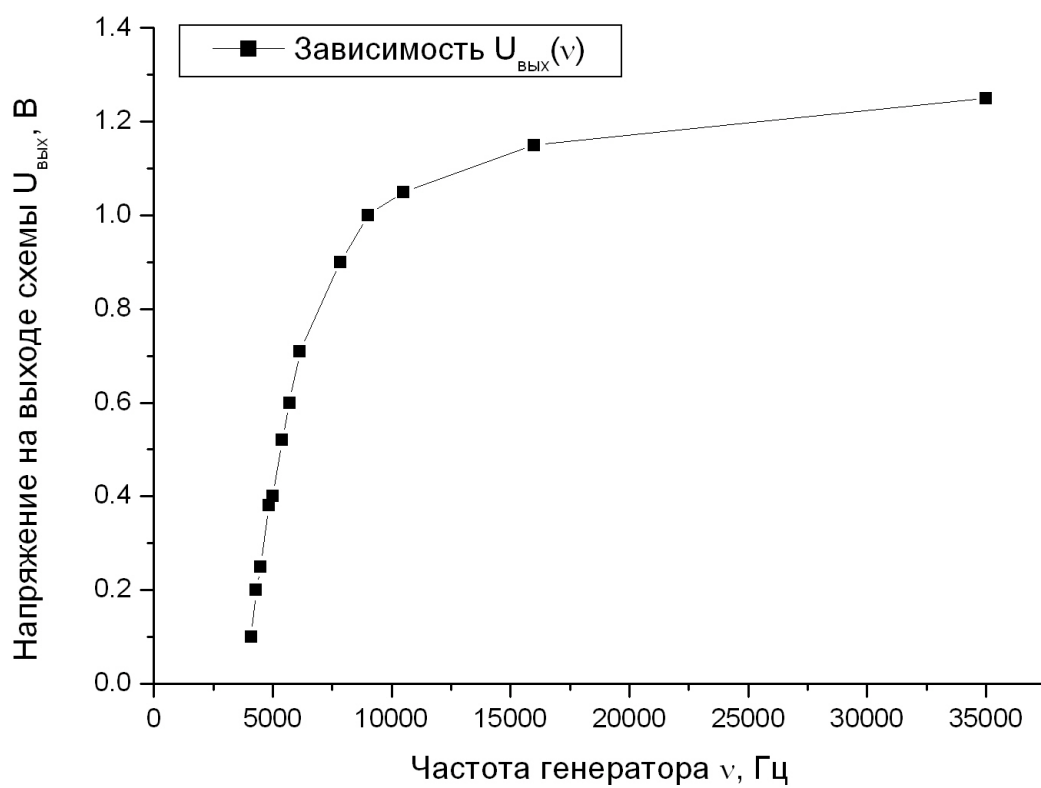


Рис. 11: Амплитудно-частотная характеристика для фильтра высоких частот

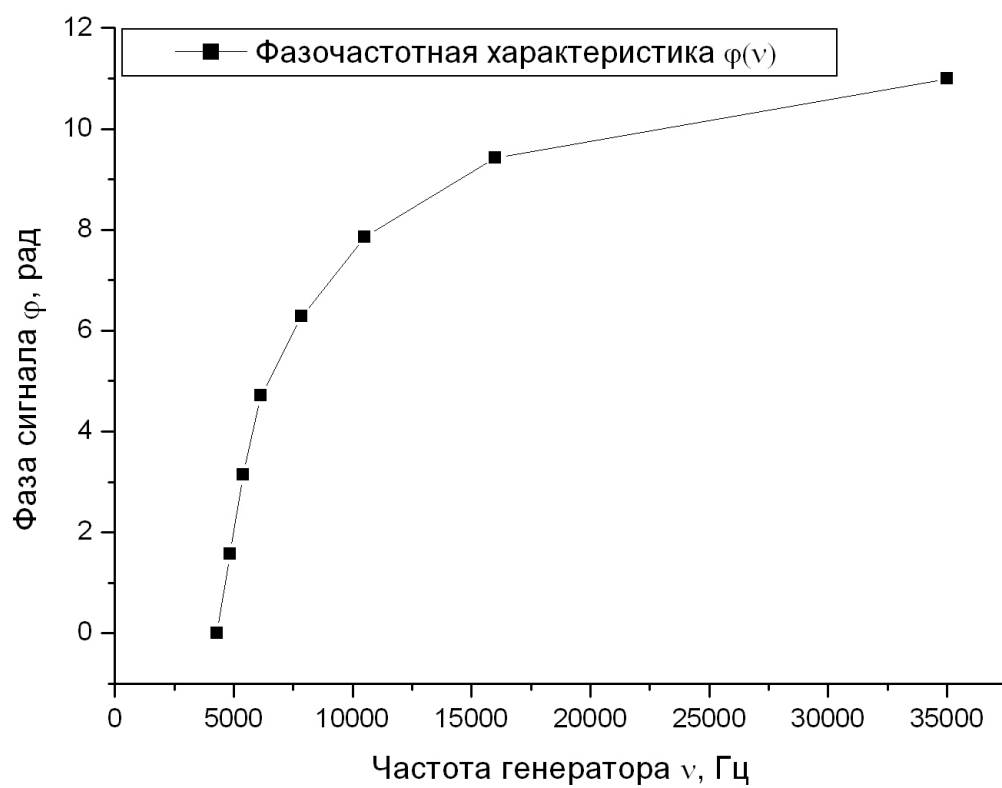


Рис. 12: Фазо-частотная характеристика для фильтра высоких частот

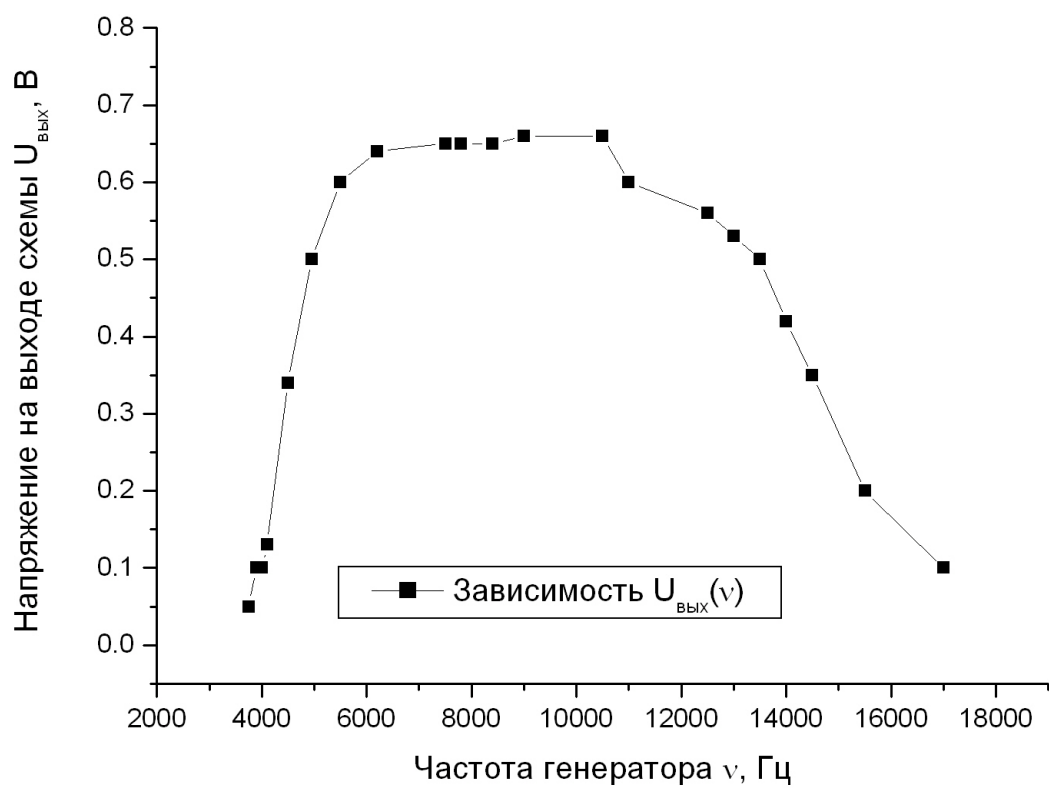


Рис. 13: Амплитудно-частотная характеристика для полосового фильтра

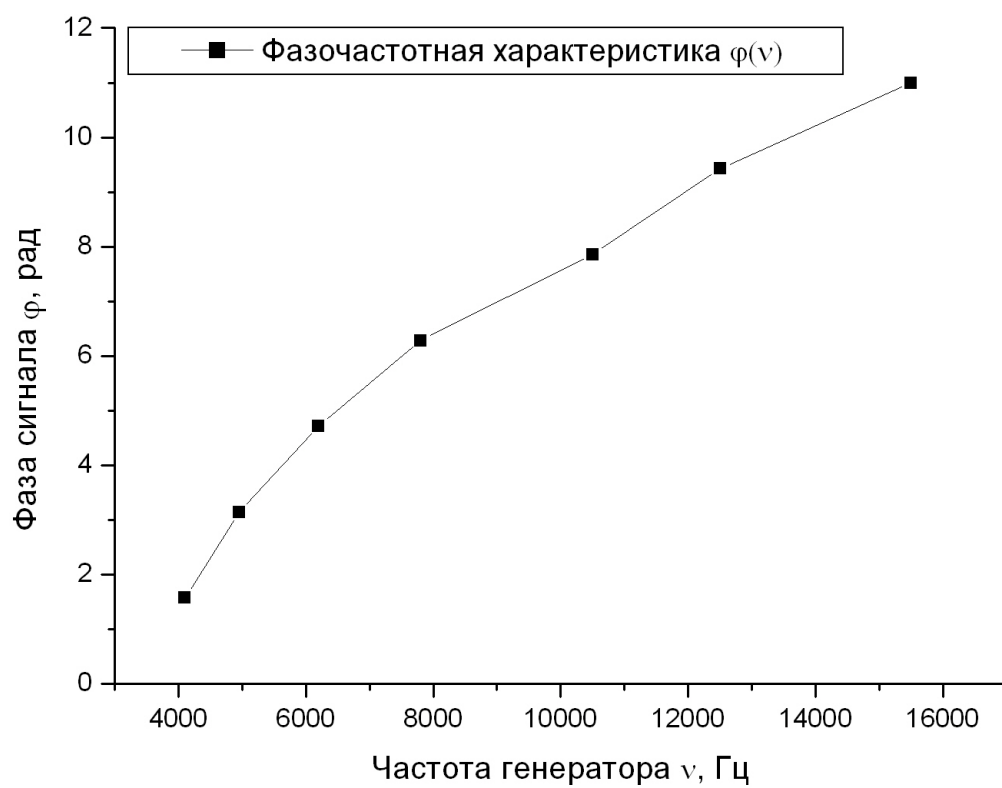


Рис. 14: Фазо-частотная характеристика для полосового фильтра



Рис. 15: Прямоугольный импульс после прохождения ВЧ-фильтра

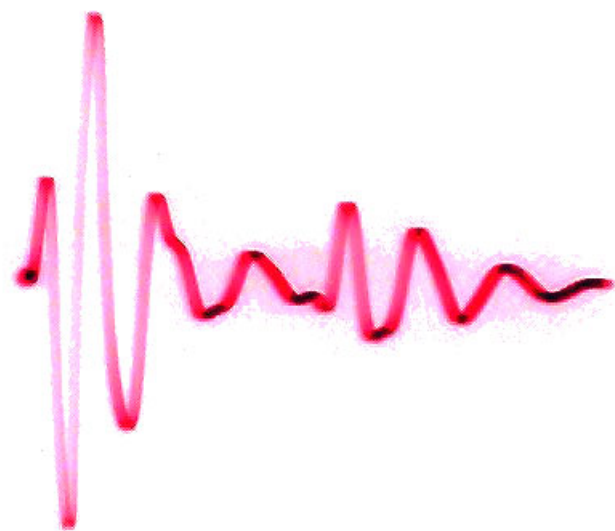


Рис. 16: Прямоугольный импульс после прохождения ПФ-фильтра