МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

Радиофизический факультет

Кафедра математики

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
(для студентов-радиофизиков)

Нижний Новгород, 1997

УДК 519.2 (076.1)

Задачи по теории вероятностей. Методическая разработка для студентов дневного отделения радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 510400 - Физика и по специальностям 071500 - Радиофизика и электроника, 071900 - Информационные системы (в радиофизике и телекоммуникациях). Нижний Новгород, изд.ННГУ им.Н.И.Лобачевского, 1997 г.

В методической разработке собраны задачи по основным разделам теории вероятностей, читаемым на радиофизическом факультете ННГУ. Каждый раздел начинается с теоретического введения, где сообщаются необходимые для решения задач сведения. В конце задачника для большинства задач указаны ответы.

Подготовлена в рамках программы "Интеграция".

Составители: Гаврилин Анатолий Тимофеевич,
Дубков Александр Александрович.

Рецензенты: Чекмарев Т.В.
Зорин В.А.

Консультант по прикладным аспектам теории вероятностей, д.ф.-м.н., с.н.с. НИРФИ Троицкий А.В.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник предназначен для студентов-радиофизиков и тематически соответствует плану практических занятий по теории вероятностей, проводимых на втором курсе радиофизического факультета ННГУ.

Все задачи сгруппированы в разделы, именуемые занятиями. Часть задач каждого раздела отводится на решение в классе, часть - в качестве домашнего задания. Кроме того, ряд задач повышенной сложности рассчитан на использование в итоговой домашней контрольной работе.

Каждый раздел сборника предваряется краткими теоретическими сведениями и необходимыми формулами. В конце задачника для большинства задач указываются ответы.

В основу сборника положена методическая разработка "Задачи по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов"(составители: А.Т.Гаврилин, О.Н.Репин, И.П.Смирнов), изд.ГГУ, 1983.

Укажем некоторые условные обозначения и сокращения, имеющиеся в тексте. Функция распределения всюду обозначается F_ξ, следующие обозначения: $f_\xi, \theta_\xi, \varphi_\xi$ применяются соответственно для плотности распределения, характеристической и производящей функции. Индикаторная функция множества A обозначается $1_A(x)$:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

В частности, $1(x) \equiv 1_{[0,\infty)}(x)$. Сокращения с.в., ф.р. и х.ф. означают, соответственно, "случайная величина", "функция распределения" и "характеристическая функция".

Занятие 1

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. КЛАССИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Математической моделью статистического эксперимента служит набор (Ω, F, P), называемый вероятностным пространством. Здесь Ω-множество (пространство) всех взаимоисключающих исходов (случаев, элементарных событий) ω эксперимента, F-множество (σ-алгебра) всех событий (наблюдаемых подмножеств Ω), $P : F \to [0, 1]$ - функция (вероятностная мера), значение которой $P(A)$ на событии A есть вероятность этого события.

Событием называется всякий факт, выполнение (или невыполнение) которого при каждом испытании однозначно фиксируется в условиях данного эксперимента. Любое событие может быть отождествлено с множеством тех (благоприятствующих ему) исходов ω, при которых оно происходит.

Классическая схема теории вероятностей предполагает выполнение следующих двух условий: а) пространство Ω состоит из конечного числа элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, б) симметрия условий эксперимента не позволяет выделить ни один из исходов. В этом случае вероятность события $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, насчитывающего k исходов, определяют отношением $P(A) = k/n$.

В геометрической схеме пространство "равновозможных" исходов (см.выше) Ω отождествляется с областью n-мерного риманова многообразия с метрическим тензором g_{ij}, имеющей конечный римановский объем $V(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{\det \|g_{ij}\|} dx_1 \ldots dx_n$. Вероятность события $A \subset \Omega$ определяется отношением $P(A) = V(A)/V(\Omega)$.

Сочетанием (из n элементов по k) называется всякое k-элементное подмножество (размещением - всякое упорядоченное k-элементное подмножество) n-элементного множества. Общее число возможных сочетаний $C_n^k = n!/k!(n-k)!$, размещений - $A_n^k = k!C_n^k$. Для $n!$ справедлива асимптотическая формула $n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$.

1. Доказать, что для любых двух событий A и B:

   (a) $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$;

   (b) $AB \subset A$, $A \subset A \bigcup B$;

   (c) $A = AB \iff A \subset B$;

   (d) $A = A \bigcup B \iff B \subset A$;

   (e) $A \bigcup B = (A \backslash B) \bigcup B = (B \backslash A) \bigcup A = (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A) \bigcup (AB)$.

2. Доказать справедливость следующих соотношений:

   (a) $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} = \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcap\limits_{i \in I} A_i} = \bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i}$;

(b) $A \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \bigcap B_i)$, $A \bigcup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \bigcup B_i)$.

3. На отрезке $[a, b]$ наудачу выбираются две точки:

   (a) Событие A: левая точка ближе к b,чем к a;

   (b) Событие B: расстояние между точками больше $(b - a)/2$;

   (c) Событие C: правая точка ближе к левой,чем к b.

   Выявить пары несовместных событий.

4. Судно имеет одно рулевое устройство, два котла и четыре турбины. Выразить события D и $\bar{D}$, где событие D обозначает факт управляемости судна, в виде булевых комбинаций событий: A (исправен руль), B_i (исправен i-й котел, $i = 1, 2$), C_j (исправна j –я турбина, $j = 1, 2, 3, 4$).

5. Рассматривается эксперимент с n-кратным подбрасыванием симметричной монеты. Построить вероятностное пространство, отвечающее этому эксперименту. Найти вероятности выпадения "орла": а) k раз, б) не менее k раз. Рассмотреть случай $k = [n/2]$ при больших n.

6. Выбранная из полного комплекта кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую наудачу взятую кость можно приставить к первой.

7. Брошены три монеты. Какова вероятность того, что выпадут ровно два герба?

8. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара окажутся разноцветными?

9. На книжной полке стоят 10 книг. Какова вероятность, что три нужные Вам книги окажутся стоящими рядом?

10. Двое разыгрывают апельсин путем "выбрасывания" каждым из игроков пальцев на одной руке и последующего суммирования их количества. Одинаковы ли вероятности четного и нечетного количества "выброшенных" пальцев?

11. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

12. В эфир одновременно выходят $2n$ радиолюбителей, причем n российских и n зарубежных. Какова вероятность полного международного диалога?

13. Найти вероятность того, что при извлечении из полной колоды n игральных карт все они окажутся разных значений.

14. Студент, присутствующий на занятии, знает второй вопрос из трех, заданных преподавателем. Какова вероятность получения им "двойки" при опросе, если в классе 25 человек, по каждому вопросу спрашивается только один студент и каждый студент может выступить только один раз?

15. На свадьбу пришло $2n$ гостей, причем одинаковое количество женщин и мужчин. Гостей посадили за круглый стол. Какова вероятность, что каждый из гостей будет окружен лицами другого пола?

16. В зале, насчитывающем $(n+k)$ мест, случайным образом занимают места n человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные $m \leq n$ мест.

17. Двое договариваются о встрече в интервале между 12 и 13 часами дня (время московское). Какова вероятность, что они встретятся, если момент прихода каждого равновозможен в указанном интервале и времена ожидания их равны соответственно τ_1 и τ_2? Рассмотреть случаи: а) $\tau_1 = \tau_2 = 5$ мин., б) $\tau_1 = 1$ час., $\tau_2 = 5$ мин.

18. На клетчатую плоскость с размером клетки d наудачу бросается монета радиуса $r \quad (2r < d)$. Определить вероятность того, что монета не пересечет ни одну из линий.

19. Доцент может добраться до института на трамвае, двигаясь в любом направлении кольцевого маршрута. Движение в обоих направлениях происходит строго по расписанию с интервалом в 5 минут. Верно ли, что вероятность поехать налево у доцента, не отличающегося пунктуальностью, равна 0.5?

20. Какое соотношение между радиусом R и толщиной H должна иметь однородная цилиндрическая шайба, чтобы вероятность ее падения на ребро равнялась $1/3$?

21. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков с длинами, не превышающими длину единичного отрезка, можно составить треугольник.

22. На окружности наудачу выбираются три точки A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

23. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ вещественны, если значения коэффициентов a, b равновозможны в квадрате $-1 \leq a \leq 1, -1 \leq b \leq 1$.

24. На отрезке AB длины L наудачу поставлены две точки M и N. Определить вероятность того, что длины каждого из трех образовавшихся отрезков не превосходят заданной величины $\alpha \quad (L/3 < \alpha < L)$.

ОТВЕТЫ

Занятие 1

3. A и B; B и C.

5. а) $C_n^k/2^n$; $\quad P_n^{[n/2]} \approx \sqrt{2/\pi n}$, б) $\sum\limits_{i=k}^{n} C_n^i/2^n \to 1/2$ при $k=[n/2]\to\infty$.

6. 4/9.

7. 3/8.

8. 7/15.

9. 1/15.

10. Нет.

11. $\simeq 0.3$.

12. $2^n\,(n!)^2\,/\,(2n)!$.

13. $4^n C_{13}^n/C_{52}^n$ при $n\le 13$; $\quad 0$ при $n>13$.

14. 0.08.

15. $n!/\left[2^{n-1}\,(2n-1)!!\right]$.

16. $C_n^m C_{n+k-m}^{n-m}/C_{n+k}^n$.

17. $1-\left[(1-\tau_1/T)^2+(1-\tau_2/T)^2\right]/2$.

18. $(1-2r/d)^2$.

19. Нет.

20. $H=R/\sqrt{2}$.

21. 0.5.

22. 1/4.

23. 2/3.

24. $(3\alpha/L-1)^2$ при $L/3<\alpha\le L/2$; $\quad 1-3\,(1-\alpha/L)^2$ при $L/2\le\alpha<L$.

Занятие 2

НЕЗАВИСИМОСТЬ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Случайные события A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)\,P(B)$.

Условной вероятностью события A (при условии, что происходит событие B, $P(B) > 0$) называют отношение

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Это равенство можно записать в виде формулы умножения вероятностей $P(AB) = P(B)\,P(A \mid B)$, обобщением которой на случай n событий служит формула

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1}),$$

справедливая при $P(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$.

Вероятность суммы событий A и B

$$P\left(A \bigcup B\right) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Вероятность суммы n событий находится по формуле

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \le k}\sum_{\le l \le n} P(A_kA_l) + \ldots + (-1)^n P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right).$$

1. Проверьте, что функция множества $P_1(\cdot) = P(\cdot \mid B)$ обладает всеми свойствами вероятности.

2. События A и B независимы. Будут ли независимыми события: а) A и $\bar{B}$, б) $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

3. Выясните, как связаны между собой свойства независимости и несовместности двух событий.

4. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все заданные вопросы. Найти ту же вероятность, используя классическое определение вероятности.

5. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наугад. Какова вероятность, что ему придется звонить не более, чем в три места?

6. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события: A - появление туза, B - появление карты красной масти, C - появление бубнового туза, D - появление десятки. Зависимы или нет следующие пары событий: а) A и B; б) A и C; в) B и C; г) B и D; д) C и D ?

7. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: A - выпадение герба на первой монете, B - выпадение хотя бы одного герба, C - выпадение хотя бы одной цифры, D - выпадение герба на одной монете. Определить путем вычисления условных и безусловных вероятностей зависимы или нет следующие пары событий: а) A и C; б) B и C; в) A и D; г) B и D.

8. Доля "счастливых" билетов в полной катушке $p \simeq 0,053$. Какова вероятность иметь хотя бы один такой билет из двух купленных, если: а) билеты соседние, б) билеты с разных рейсов?

9. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление хотя бы одной шестерки имело вероятность: а) большую 0.5, б) большую 0.8?

10. Доказать, что из условия

$$P\left(B \mid \bar{A}\right) = P\left(B \mid A\right)$$

следует независимость событий A и B.

11. Даны три попарно независимых события, которые не могут произойти одновременно. Определить максимально возможное значение вероятности суммы этих событий.

12. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно: есть книга в ее фонде или нет. В том случае, когда книга имеется в фонде, одинаково вероятно: взята она читателем или нет. Что более вероятно - достанет студент книгу или нет, если известно, что фонды библиотек комплектуются независимо друг от друга?

13. Определить вероятность того, что наудачу выбранное целое положительное число не делится: а) ни на 2, ни на 3; б) на 2 и на 3.

14. В связке из n ключей только один подходит к секретеру. Ключи последовательно подбирают до тех пор, пока не обнаружат нужный ключ. Найти вероятность того, что секретер откроют k-м ключом.

15. В урне m белых и n черных шаров. Из урны вынимают $2k$ шаров $(2k < m, \quad 2k < n)$. Найти вероятность того, что среди них будет больше белых, чем черных.

16. **Задача Чебышева.** Определить вероятность того, что написанная наудачу простая дробь m/n несократима.

17. Доказать *неравенство Белла*: для $\forall A, B, C \in F$

$$P\left(AB\right) \leq P\left(AC\right) + P\left(B\bar{C}\right).$$

18. Радиолокационная станция ведет наблюдение за k объектами. За время наблюдения i-тый объект может быть потерян с вероятностью $p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$. Найти вероятность следующих событий: A - ни один объект не будет потерян; B - будет потеряно не менее одного объекта; C - будет потеряно не более одного объекта.

19. Пусть события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности и $P(A_k) = p_k$. Доказать, что вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$ больше

$$\int\limits_0^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} e^{-x} dx.$$

20. Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет "герб". Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

21. Доказать, что если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \subset B$, то

$$P(B) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n.$$

22. Аспирант написал n писем и в спешке заклеил конверты, не подписав их. Не имея средств на приобретение новых конвертов, он решил подписать конверты "на авось". Какова вероятность, что хотя бы один адресат получит свое письмо? Оценить эту вероятность для больших n.

ОТВЕТЫ

Занятие 2

2. а) да, б) да.
4. 57/115.
5. 0.3.
6. а) нет, б) да, в) да, г) нет, д) да.
7. а) да, б) да, в) нет, г) да.
8. а) $2p$, б) $2p - p^2$.
9. а) $n > 1/\log_2(1.2)$; б) $n > 1/\log_5(1.2)$.
11. 3/4.
12. Более вероятно, что достанет.
13. 1) 1/3, 2) 5/6.
14. $1/n$.
15. $\sum\limits_{i=0}^{k-1} C_m^{2k-i} C_n^i / C_{m+n}^{2k}$.
16. $P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdot \ldots = 6/\pi^2$.
20. 4/7, 2/7, 1/7.
22. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}/k! \to 1 - 1/e \simeq 0.63$ при $n \to \infty$.

Занятие 3

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА. СХЕМА НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

Конечный набор событий $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ называется полной группой, если 1) $H_1 \bigcup H_2 \bigcup \ldots \bigcup H_n = \Omega$, 2) $H_i \bigcap H_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Если $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ - полная группа событий и $P(H_i) > 0$, $\forall i$, то для любого события A имеет место формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

Для любых двух событий A, B ненулевой вероятности справедлива формула Байеса

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) P(A \mid B)}{P(A)}.$$

В частности, если $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ - полная группа событий и $P(A) > 0$, $P(H_i) > 0$, $\forall i$, то

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) P(A \mid H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) P(A \mid H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) P(A \mid H_j)} -$$

- теорема Байеса. Последняя формула позволяет найти апостериорные (послеопытные) вероятности $P(H_i \mid A)$ гипотез H_i через их априорные (доопытные) вероятности $P(H_i)$ и условные вероятности события A по отношению к гипотезам H_j.

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем каждый опыт может иметь k взаимоисключающих исходов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1\right)$, то вероятность того, что в m_1 опытах появится событие A_1, в m_2 опытах - событие A_2 и т.д., в m_k опытах - событие A_k $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = n\right)$ выражается формулой

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_k; n} = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}.$$

В частном случае двух исходов (событие A появляется в одном испытании с вероятностью p и не появляется с вероятностью $q = 1 - p$) получаем так называемую схему испытаний Бернулли. Формула для вероятности появления события A ровно m раз в n независимых испытания приобретает вид

$$P_{m;n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n.$$

1. Имеются два одинаковых ящика с шарами: в одном 2 белых и 1 черный шар, в другом - 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один из ящиков и вынимают из него шар. Какова вероятность, что этот шар белый ?

2. В урне n шаров, причем все предположения о количестве в ней черных шаров равновероятны. Последовательно извлечены k шаров, оказавшиеся черными. Какова вероятность, что все n шаров в урне черные, если шар после выемки: а) опускается обратно, б) обратно не опускается.

3. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Найти вероятность "стыковки" этих костей.

4. Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за время t равна $P_k(t)$. Количества вызовов за любые два соседних промежутка времени независимы. Составить функциональное уравнение для определения функции $P_k(t)$. Проверить, что функция:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \ \lambda > 0$$

служит решением этого уравнения.

5. Студент направляется на лекцию по теории вероятностей, делая очередной шаг в направлении аудитории с вероятностью p и, с вероятностью $1-p$ шагая в прямо противоположном направлении. Какова вероятность, что он будет присутствовать на лекции, если до аудитории остается: а) один шаг, б) n шагов?

6. Найти вероятность того, что 100 лампочек, взятых наудачу из 1000, окажутся исправными, если число непригодных на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

7. Из чисел $1, 2, \dots, n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым и вторым выбранным числом будет не меньше $m \quad (m > 0)$?

8. Из партии в 5 изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Какая гипотеза о количестве бракованных изделий в партии наиболее правдоподобна ?

9. В условиях задачи 3.6 определить вероятность отсутствия бракованных лампочек в партии из 1000 штук, если среди взятых 100 все оказались исправными.

10. Два стрелка независимо друг от друга совершают по одному выстрелу в общую мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.8, для второго - 0.4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность, что в мишень попал первый стрелок ?

11. Трое охотников одновременно выстрелили по кабану, но только одна из пуль попала в цель, сразив кабана наповал. Найти вероятности того, что зверь убит первым, вторым и третьим охотником, если вероятности попадания в цель для них соответственно равны 0.2, 0.4, 0.6.

12. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1-p)$ - только одна помеха. Если

поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью p_1 (вероятность пропуска цели - $(1 - p_1)$); если только помеха, то с вероятностью p_2 (ложная тревога). Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в возмущении, поступившем на вход радиолокационного устройства, действительно имеется полезный сигнал.

13. Что вероятнее выиграть у равносильного противника:

    а) три партии из четырех или пять из восьми ?

    б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти из восьми ?

14. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0.1. Какова вероятность того, что в сообщении из 10 знаков: а) нет искажений, б) ровно три искажения, в) не более трех искажений?

15. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий равнялось 20?

16. Простейший вариант игры "серсо" состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает их до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо окажется неиспользованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0.1.

17. Имеется N лунок, по которым случайным образом разбрасываются M шариков. Найти вероятность того, что в данную лунку попадет ровно k шариков.

18. Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее количество появлений числа очков, кратного трем.

19. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в "яблочко" мишени, равна 0.2, а в остальную часть мишени - 0.5. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах четыре пули окажутся в "яблочке" и 4 - в остальной части мишени.

20. Матч за звание чемпиона мира по шахматам между равносильными в то время гроссмейстерами Карповым и Каспаровым, игравшийся до шести побед одного из участников (ничьи не в счет), был прекращен при счете 5 : 3 в пользу Карпова ввиду физического истощения обоих претендентов. В какой пропорции следует разделить призовой фонд матча, если мысленно спрогнозировать его возможное продолжение ?

ОТВЕТЫ

Занятие 3

1. 13/30.
2. а) $n^k / \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$, б) $C_n^k / \sum\limits_{i=k}^{n} C_i^k$.
3. 7/18.
4. $P_k\left(t+\tau\right) = \sum\limits_{i=0}^{k} P_i\left(t\right) P_{k-i}\left(\tau\right)$.
5. а) $P_1 = \left(1 - \left|2p - 1\right|\right) / 2\left(1-p\right)$; б) $P_n = \left(P_1\right)^n$.
6. $\sum\limits_{k=0}^{5} C_{1000-k}^{100} / 6C_{1000}^{100}$.
7. $\left(n-m\right)\left(n+1-m\right)/2n^2$.
8. Все изделия - бракованные.
9. $C_{1000}^{100} / \sum\limits_{k=0}^{5} C_{1000-k}^{100}$.
10. 6/7.
11. 0.10, 0.28, 0.62.
12. $pp_1 / \left[p_2 + p\left(p_1 - p_2\right)\right]$.
13. а) три партии из четырех, б) не менее пяти партий из восьми.
14. а) $\left(0.9\right)^{10}$; б) $C_{10}^3 \left(0.1\right)^3 \left(0.9\right)^7$; в) $\sum\limits_{k=0}^{3} C_{10}^k \left(0.1\right)^k \left(0.9\right)^{10-k}$.
15. 24 или 25.
16. 0.41.
17. $C_M^k \left(N-1\right)^{M-k} / N^M$.
18. 5.
19. 0.028.
20. 7 : 1.

Занятие 4

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть ξ - случайная величина, принимающая не более чем счетное число изолированных возможных значений $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ с вероятностями $P(\xi = c_i) = p_i$, $\sum\limits_{i \geq 1} p_i = 1$. Тогда ξ называют дискретной случайной величиной, а совокупность вероятностей $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ - рядом распределения этой величины.

Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ определяется равенством

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \qquad x \in \Re^1.$$

Она называется абсолютно непрерывной, если существует функция $f_\xi(x)$ такая, что

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt, \qquad x \in \Re^1.$$

Случайная величина ξ в этом случае называется непрерывной, а $f_\xi(x)$ называется плотностью распределения вероятностей ξ или просто плотностью вероятности.

Примером непрерывной случайной величины служит гауссова (нормальная) случайная величина с параметрами (a, σ^2):

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad x \in \Re^1.$$

Модой непрерывной случайной величины называется всякое число, в котором плотность $f_\xi(x)$ достигает своего локального максимума. Медиана m_e находится из соотношения $P\{\xi \leq m_e\} = P\{\xi > m_e\}$.

Для случайных величин смешанного типа, функция распределения которых представима в виде суммы $F_g(x) + F_{an}(x)$, где $F_g(x)$ - кусочно-постоянная функция, а $F_{an}(x)$ - абсолютно непрерывная функция, вводится обобщенная плотность вероятности

$$f_\xi(x) = \sum_k p_k \delta(x - c_k) + f_{an}(x),$$

где: c_k - точки разрыва функции $F_g(x)$, p_k - скачки $F_g(x)$ в этих точках, $f_{an}(x)$ - плотность $F_{an}(x)$, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

1. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при четырех бросках, если вероятность попадания при одном броске равна 0.3.

2. Два баскетболиста поочередно бросают мяч по кольцу, пока один из них не попадет. Пусть ξ_i - число бросков i-го игрока $(i = 1, 2)$. Построить функции распределения для случайных величин ξ_1 и ξ_2, если вероятности попадания для игроков равны соответственно 0.4 и 0.6.

3. Из партии в 25 изделий, среди которых 6 бракованных, взяты 3 изделия. Построить ряд распределения и функцию распределения числа бракованных изделий в выборке.

4. В схеме Бернулли с параметрами n и p введем случайную величину ξ_i - длительность серии "неуспехов", предшествующей i-ому успеху. Для определенности фиктивное $(n+1)$-ое испытание будем считать успешным. Одинаково ли распределены случайные величины ξ_i?

5. Доказать, что если $F(x)$ - функция распределения некоторой случайной величины, то и функции вида

$$\Phi_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)dt \qquad\qquad (h > 0)$$

могут быть функциями распределения.

6. Пусть ξ - непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f_\xi(x)$. Найти $P\{a \le \xi \le b\}$, где $-\infty \le a \le b \le +\infty$.

7. Доказать, что плотность вероятности $f_\xi(x)$ обладает следующими свойствами:

   (a) $f_\xi(x) \ge 0$ для $\forall x \in \Re^1$,

   (b) $\int\limits_{\Re^1} f_\xi(x)dx = 1$ (условие нормировки),

   (c) $\int\limits_{m_e}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1/2$.

8. Найти плотность вероятности, медиану и моды непрерывной случайной величины, имеющей функцию распределения следующего вида:

   (a)
$$F_\xi\left(x\right) = \frac{x-a}{b-a}\cdot 1_{[a,b]}\left(x\right) + 1_{(b,\infty)}\left(x\right);$$

   (b)
$$F_\xi\left(x\right) = \left(a + b\arcsin x\right)\cdot 1_{[-1,1]}\left(x\right) + 1_{(1,\infty)}\left(x\right), \qquad a, b = ?$$

   (c)
$$F_\xi\left(x\right) = \left(1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\right)\cdot 1\left(+x\right);$$

   (d)
$$F_\xi\left(x\right) = a + b\arctan x, \qquad a, b = ?$$

9. Найти функцию распределения, медиану и моды случайной величины, имеющей плотность вероятности следующего вида:

(a)

$$f_\xi(x) = \frac{\alpha}{1+x^2};$$

(b)

$$f_\xi(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot 1\,(x)\,;$$

(c)

$$f_\xi(x) = \alpha \cdot 1_{\{a \le |x| \le b\}}\,(x)\,;$$

(d)

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

При каких α данные функции действительно являются плотностями вероятности ? Какова вероятность, что $|\xi| < 1$ в каждом случае ?

10. Вася и Петя договорились встретиться в библиотеке между 12 и 13 часами дня. Предполагая, что они приходят независимо и равновозможно в течение этого часа, найти функцию распределения времени ожидания Васи Петей.

11. Функция распределения времени ξ безотказной работы прибора имеет вид

$$F_\xi(t) = \left(1 - e^{-t/T}\right) \cdot 1\,(t)$$

(показательное распределение). Найти медиану, моды и плотность вероятности ξ. Какова вероятность безотказной работы прибора в течение времени T ? Доказать, что ξ удовлетворяет следующему условию отсутствия последействия

$$P\,\{t < \xi < s \mid \xi > t\} = P\,\{\xi < s - t\}\,, \qquad t < s.$$

Доказать, что среди всех распределений с непрерывной функцией $F_\xi(t)$ отсутствием последействия обладает лишь показательное.

ОТВЕТЫ

Занятие 4

4. Нет.

10. $F_\xi\,(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \le 0 \\ \left(1 + 2t - t^2\right)/2, & 0 < t \le 1 \\ 1, & t > 1 \end{array} \right| .$

11. $P\,\{\xi \ge T\} = 1/e.$

Занятие 5

МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Начальным моментом n-го порядка случайной величины ξ называется значение интеграла Стилтьеса

$$\alpha_n = M\xi^n = \int\limits_{\Re^1} x^n dF_\xi(x). \tag{1}$$

Начальный момент первого порядка $\alpha_1 = M\xi$ носит название математического ожидания или среднего значения.

Центральным моментом n-го порядка величины ξ называют начальный момент n-го порядка центрированной случайной величины $\xi - M\xi$

$$\mu_n = M(\xi - \alpha_1)^n = \int\limits_{\Re^1} (x - \alpha_1)^n dF_\xi(x). \tag{2}$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю: $\mu_1 = 0$, а центральный момент второго порядка $\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2$ называют дисперсией случайной величины и обозначают через $D\xi$. Величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$, именуемая средне-квадратичным отклонением, характеризует разброс значений случайной величины ξ относительно среднего значения.

Интегралы (1) и (2) для дискретной случайной величины с рядом распределения $c_i \mid p_i$ принимают вид конечных сумм или рядов:

$$\alpha_n = \sum_{i\geq 1} c_i^n p_i, \qquad \mu_n = \sum_{i\geq 1} (c_i - M\xi)^n p_i$$

(ряды предполагаются абсолютно сходящимися), а для непрерывной случайной величины с плотностью вероятности $f_\xi(x)$ записываются в виде интегралов Римана:

$$\alpha_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n f_\xi(x)\,dx, \qquad \mu_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^n f_\xi(x)\,dx.$$

Для случайной величины смешанного типа начальные и центральные моменты вычисляются по формулам:

$$\alpha_n = \sum_k c_k^n p_k + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n f_{an}(x)\,dx, \quad \mu_n = \sum_k (c_k - M\xi)^n p_k + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^n f_{an}(x)\,dx.$$

1. Производятся независимые испытания трех изделий, вероятности отказов которых равны соответственно p_1, p_2, p_3. Доказать, что математическое ожидание числа отказавших изделий равно $p_1 + p_2 + p_3$.

2. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков, выпадающих при бросании одной игральной кости.

3. Множество возможных значений случайной величины ξ состоит из двух чисел a и b. Для какого ряда распределения величины ξ дисперсия $D\xi$ максимальна ?

4. Найти математическое ожидание числа выигрышных лотерейных билетов из 40 приобретенных, если вероятность выигрыша равна 0.05.

5. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, последовательно извлекают шары до появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращается в сосуд.

6. Автоматическая линия выпускает бракованное изделие с вероятностью p. Переналадка линии производится сразу после выпуска бракованного изделия. Найти среднее число всех изделий, изготовляемых между двумя переналадками.

7. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что
$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\xi \geq k\right\},$$
если $M\xi < +\infty$.

8. Из урны, в которой находятся два белых и три черных шара, вынимается сразу два шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появившихся при этом белых шаров.

9. По некоторой цели производят n независимых выстрелов. Вероятности попадания в цель для этих выстрелов равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Для упрощения вычислений эти вероятности усредняют, заменяя одной постоянной
$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i.$$
По $\bar{p}$ определяют математическое ожидание и дисперсию числа попаданий. Справедливо ли такое вычисление?

10. Неотрицательная случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$. Доказать, что если $M\xi$ существует, то
$$M\xi = \int_0^{\infty} \left[1 - F_\xi(x)\right] dx.$$

11. Определить условия, при которых третий центральный момент биномиальной случайной величины равен нулю.

12. Точка A бросается наудачу внутрь круга радиуса R. Найти плотность вероятности и математическое ожидание случайной величины ξ - расстояния от точки A до центра круга, считая равновозможным попадание точки в любое место круга.

13. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид (закон арксинуса)

$$f_\xi(x) = 1/\left(\pi\sqrt{a^2 - x^2}\right) \cdot 1_{(-a,a)}(x).$$

Найти дисперсию случайной величины ξ.

14. Огибающая узкополосного нормального шума ξ задается плотностью вероятности (закон Рэлея)

$$f_\xi(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot 1(x).$$

Одинаково ли часто встречаются значения ξ, большие и меньшие математического ожидания $M\xi$?

15. Абсолютная величина скорости молекул газа ξ подчиняется закону Максвелла

$$f_\xi(v) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2v^2} \cdot 1(v).$$

Найти $M\xi$ и $D\xi$.

16. Интенсивность грозовых разрядов ξ аппроксимируется логарифмически нормальным распределением

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\beta x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\beta^2}(\ln x - a)^2\right\} \cdot 1(x).$$

Найти $M\xi$ и $D\xi$.

17. Моментом k-го порядка случайной величины ξ относительно точки a называется значение интеграла Стилтьеса

$$\nu_k(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k \, dF_\xi(x).$$

При каком a второй момент $\nu_2(a)$ принимает наименьшее значение ?

18. Доказать, что для любой случайной величины ξ, значения которой заключены в отрезке $[a, b]$, имеют место неравенства:

$$a \le M\xi \le b; \qquad D\xi \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Для какого распределения достигается равенство

$$D\xi = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad ?$$

19. По сторонам прямого угла XOY скользит концами линейка AB длины l, занимая случайное положение в фиксированный момент времени. Найти математическое ожидание расстояния от начала координат до линейки, считая все значения абсциссы ξ конца A линейки на оси OX равновероятными.

20. Пусть μ_k -k-ый центральный момент случайной величины ξ. Доказать, что

$$\mu_4\mu_2 - \mu_3^2 \geq \mu_2^3.$$

21. Вероятность того, что частица на участке пути $[l, l+dl]$ столкнется с другой частицей равна λdl. Найти функцию распределения длины свободного пробега (без столкновений) ξ, а также ее математическое ожидание и дисперсию.

ОТВЕТЫ

Занятие 5

2. 3.5, 35/12.
3. $P\{\xi = a\} = P\{\xi = b\} = 1/2$.
4. 2.
5. n/m, $n(n+m)/m^2$.
6. $1/p$.
8. 0.8, 0.36.
9. Справедливо для математического ожидания, но не для дисперсии.
11. $\mu_3 = np(1-p)(1-2p)$.
12. $f_\xi(r) = (2r/R^2)\, 1_{[0,R]}(r)$, $M\xi = 2R/3$.
13. $a^2/2$.
14. Нет.
15. $2/\sqrt{\pi}h$, $(3\pi - 8)/2\pi h^2$.
16. $e^{\alpha+\beta^2/2}$, $e^{2\alpha+\beta^2}\left(e^{\beta^2} - 1\right)$.
17. $a = M\xi$.
19. $l/3$.
21. $F_\xi(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \cdot 1(x)$, $M\xi = 1/\lambda$, $D\xi = 1/\lambda^2$.

<u>Занятие 6</u>

СЛУЧАЙНЫЙ ВЕКТОР

Случайным n-мерным вектором называется упорядоченный набор n случайных величин $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, заданных на одном вероятностном пространстве. Функция распределения вектора $\vec{\xi}$ в точке $\vec{x}$ определяется вероятностью события $\Omega_{\vec{x}} = \{(\xi_1 < x_1) \cap \ldots \cap (\xi_n < x_n)\}$:

$$F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) \equiv F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) \equiv P\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}.$$

Если имеет место представление: для $\forall \vec{x} \in \Re^n$

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1 \ldots \xi_n}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n,$$

то функцию

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{\partial^n F_{\vec{\xi}}(\vec{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$

называют плотностью распределения случайного вектора $\vec{\xi}$.

Примером двумерного случайного вектора служит нормальный вектор (ξ, η) с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$, плотность распределения которого имеет вид

$$f_{\xi\eta}(x, y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Корреляционная матрица $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}$ n-мерного вектора $\vec{\xi}$ определяется следующим образом:

$$K_{ij} = M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j), \qquad i, j = 1 \div n.$$

Заметим, что диагональные элементы матрицы совпадают с дисперсиями случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$: $K_{ii} = D\xi_i$ и поэтому неотрицательны. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется число

$$r_{\xi\eta} \equiv \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.$$

Если $r_{\xi\eta} = 0$, то случайные величины ξ и η называются некоррелированными.

1. Случайный вектор (ξ, η) распределен по закону

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}.$$

(a) Найти коэффициент a.

(b) Являются ли случайные величины ξ и η зависимыми ?

(c) Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрат с уравнениями сторон: $x = 1, \quad x = -1, \quad y = 1, \quad y = -1$.

2. Задана двумерная плотность вероятности

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

случайного вектора (ξ, η). Найти постоянную c.

3. Случайный вектор (ξ, η) распределен равномерно в круге радиуса R с центром в начале координат. Доказать, что ξ и η зависимы, но некоррелированы.

4. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) распределен равномерно внутри шара радиуса R. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) внутрь шара, концентрического данному, с радиусом $R/2$.

5. Электронный луч в кинескопе подвергается воздействию случайного скачкообразного напряжения таким образом, что пятно на экране за единицу времени перемещается на единичное расстояние параллельно одной из осей координат, каждый раз либо продолжая прежнее направление движения, либо меняя его на $\pm 90^0$ с вероятностями $1/3$. Найти математическое ожидание радиус-вектора пятна $\vec{\xi}(n)$ в момент n при условии, что $\vec{\xi}(0) = (0, 0)\,, \quad \vec{\xi}(1) = (1, 0)$.

6. Доказать, что если ξ и η связаны линейной зависимостью $\eta = a\xi + b$, то

$$r_{\xi\eta} = \left\{\begin{matrix} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{matrix}\right| .$$

7. Двумерный дискретный случайный вектор (т.е. вектор, компонентами которого служат дискретные случайные величины) удобно задавать таблицей вероятностей его возможных значений. Дана таблица вероятностей для совокупности двух дискретных случайных величин ξ и η:

$\xi \backslash \eta$	-1	0
0	$1/4$	$5/12$
1	$1/6$	$1/6$

Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

8. Предположим, что совместное распределение n случайных величин такого, что коэффициент корреляции между любыми двумя из них равен ρ. Доказать, что

$$\rho \geq \frac{1}{1 - n}.$$

9. Даны две независимые случайные величины ξ и η. Величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $(0,1)$, а величина η - равномерно на интервале $(0,1)$. Записать плотность распределения и функцию распределения случайного вектора (ξ,η).

10. Задана плотность распределения случайного вектора (ξ,η)

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \left\{ \begin{array}{rr} \sin(x+y)/2, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{array} \right|,$$

где $D = \{(x,y) : x\in[0,\pi/2], \quad y\in[0,\pi/2]\}$. Найти математические ожидания и дисперсии составляющих ξ,η.

11. Случайный вектор (ξ,η) имеет плотность распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$. Выразить через плотность $f_{\xi\eta}(x,y)$ вероятности событий: а) $\xi>\eta$, б) $\xi>|\eta|$, в) $|\xi|>\eta$, г) $\xi-\eta>1$ и построить эти области на графике.

12. Случайный вектор (ξ,η) имеет плотность распределения

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}.$$

Определить вероятности следующих событий: а) $|\eta|<\xi$, б) $\eta<\xi$, в) $\eta<|\xi|$.

13. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $f_\xi(x)$, а случайная величина η связана с ней функциональной зависимостью $\eta=\xi^2$. Найти функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ совокупности случайных величин (ξ,η).

14. Из полной колоды карт (52 карты) одновременно извлекают две. Рассматриваются две случайные величины: ξ - число вынутых тузов, η - число вынутых карт красной масти. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

15. Дана таблица вероятностей совокупности двух дискретных независимых случайных величин ξ и η:

$\xi\backslash\eta$	0	1
0	α	β
1	γ	δ

Каково количество независимых элементов в данной таблице ?

16. Пусть каждая из случайных величин ξ и η принимает ровно два значения. Доказать, что из равенства $M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta$ следует независимость ξ и η.

17. Доказать, что компоненты двумерного нормального вектора (ξ,η) являются нормально распределенными случайными величинами.

18. Доказать, что необходимым и достаточным условием независимости случайных величин ξ,η, имеющих совместное нормальное распределение, является их некоррелированность.

ОТВЕТЫ

Занятие 6

1. а) $1/\pi^2$, б) нет, в) $1/4$.
2. $2/\pi$.
4. $1/8$.
5. $M\vec{\xi}(n) = (3/2) \cdot (1 - 1/3^n) \cdot \vec{\xi}(1)$.
7. $-1/\sqrt{70}$.
10. $M\xi = M\eta = \pi/4; D\xi = D\eta = (\pi^2 + 8\pi - 32)/16$.
12. а) $1/4$, б) $1/2$, в) $3/4$.
13. $F_{\xi\eta}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & (y < 0) \vee \left(y > 0, x < -\sqrt{y}\right) \\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{x} f_\xi(u)\, du, & x^2 < y \\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_\xi(u)\, du, & x > \sqrt{y}, y > 0 \end{array} \right|$
14. Да.
15. Два.

Занятие 7

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\vec{\xi}$ - n-мерный случайный вектор с известной функцией распределения $F_{\vec{\xi}}(\vec{x})$, $\vec{\varphi} : \Re^n \to \Re^m$ - заданная вектор-функция. Функция распределения случайного вектора $\vec{\eta} = \vec{\varphi}\left(\vec{\xi}\right)$ может быть найдена следующим образом:

$$F_{\vec{\eta}}(\vec{y}) = F_{\eta_1 \ldots \eta_m}(y_1, \ldots, y_m) = P\left\{\varphi_1\left(\vec{\xi}\right) < y_1, \ldots, \varphi_m\left(\vec{\xi}\right) < y_m\right\} =$$

$$= \int\limits_{D(\vec{y})} dF_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\vec{c}_k \in D(\vec{y})} P\left\{\vec{\xi} = \vec{c}_k\right\} \text{ – для дискретного вектора} \\ \int\limits_{D(\vec{y})} f_{\vec{\xi}}(\vec{x})\, d\vec{x} \text{ - для непрерывного вектора} \end{array} \right|$$

где $D(\vec{y}) = \{\vec{x} \in \Re^n : \varphi_1(\vec{x}) < y_1, \ldots, \varphi_m(\vec{x}) < y_m\}$.

Если $n = m$, функция $\vec{\varphi}(\vec{x})$ обратима, якобиан обратной функции $D\left(\vec{\psi}\right)/D(\vec{y}) \neq 0$ на множестве полной меры Лебега, то в случае непрерывного вектора $\vec{\xi}$ с плотностью $f_{\vec{\xi}}(\vec{x})$ плотность вероятности вектора $\vec{\eta}$ имеет вид

$$f_{\vec{\eta}}(\vec{y}) = f_{\vec{\xi}}\left(\vec{\psi}(\vec{y})\right)\left|\frac{D\left(\vec{\psi}\right)}{D(\vec{y})}\right|.$$

В одномерном случае справедлива также следующая формула

$$f_\eta(y) = \sum_i f_\xi(\psi_i(y))\left|\frac{d\psi_i}{dy}\right| \cdot 1_{D_i}(y),$$

где D_i - множество определения i-той ветви обратной функции.

1. Пусть ξ - дискретная случайная величина с известным рядом распределения $c_i \mid p_i$. Найти ряд распределения случайных величин: а) $\xi + 1$, б) 2ξ, в) ξ^2.

2. Сумму двух независимых равномерно распределенных на множестве $\{0, 1, \ldots, 9\}$ случайных величин ξ_1 и ξ_2 можно записать в виде $\xi_1 + \xi_2 = 10\eta_2 + \eta_1$ $(0 \leq \eta_i \leq 9)$. Найти законы распределения η_1 и η_2. Зависимы ли случайные величины η_1 и η_2 ?

3. Пусть ξ - случайная величина с непрерывной функцией распределения $F_\xi(x)$. Найдите закон распределения случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$. Укажите способ получения случайной величины с заданным законом распределения $F_0(x)$, если в Вашем распоряжении имеется случайная величина ξ, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

4. Пусть ξ - случайная величина с известной функцией распределения $F_\xi(x)$. Найти закон распределения случайной величины η для: а) $\eta = \alpha\xi + \beta, \quad \alpha \neq 0, \beta \in \Re^1$; б) $\eta = \xi^k, \quad k \in \mathbf{N}$; в) $\eta = |\xi|$; г) $\eta = \xi \cdot 1(\xi)$. При каких условиях существует плотность вероятности $f_\eta(y)$? Найти $f_\eta(y)$. Рассмотреть примеры:

(a)
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\};$$
(b)
$$f_\xi(x) = 1_{\left\{|x|\le\frac{1}{2}\right\}}(x);$$
(c)
$$f_\xi(x) = e^{-x} \cdot 1(x).$$

5. Пусть вектор (ξ, η) имеет плотность распределения $f_{\xi\eta}(x, y)$. Найти закон распределения случайной величины ζ для: а) $\zeta = \xi \pm \eta$; б) $\zeta = \xi \cdot \eta$; в) $\zeta = \xi/\eta$. Рассмотреть следующие примеры независимых случайных величин ξ и η:

   (a)
   $$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad f_\eta(y) = ye^{-y^2/2} \cdot 1(y);$$
   (b)
   $$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} 1_{\{|x|\le 1\}}(x), \qquad f_\eta(y) = ye^{-y^2/2} \cdot 1(y);$$
   (c)
   $$f_\xi(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x^2/2a^2} \cdot 1(x), \qquad f_\eta(y) = \frac{y}{a^2} e^{-y^2/2a^2} \cdot 1(y);$$
   (d)
   $$f_\xi(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-nx^2/2}, \qquad f_\eta(y) = 2\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} y^{n-1} \frac{e^{-ny^2/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot 1(y);$$
   (e)

   ξ, η - нормально распределены с параметрами $(0, \sigma_1^2)$, $(0, \sigma_2^2)$ соответственно.

6. Координата ξ точечного единичного заряда, расположенного на оси OX, распределена с плотностью $f_\xi(x)$. Найти закон распределения потенциала, создаваемого зарядом в точке $(0, 1)$ на плоскости XOY. Рассмотреть примеры a)-c) из задачи 7.4.

7. В центре основания кругового цилиндра радиуса r находится источник излучения. Найти функцию распределения случайной величины ξ - высоты попадания фотона в стенку цилиндра.

8. Свободный член ξ квадратного уравнения $x^2 - 2x + \xi = 0$ равномерно распределен на отрезке $[-1, 1]$. Найти закон распределения меньшего корня η уравнения.

9. Случайная величина ξ распределена по показательному закону:

$$f_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1(x).$$

Каким функциональным преобразованием можно превратить ее в случайную величину η, распределенную по закону Коши:

$$f_{\eta}(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \quad ?$$

10. Источник излучения находится над поверхностью прозрачного вещества с показателем преломления $n > 1$. Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины β - угла преломления луча в прозрачной среде, если все направления лучей от источника в воздухе равновероятны.

11. Имеется совокупность двух случайных величин (ξ, η) с заданной плотностью вероятности $f_{\xi\eta}(x, y)$. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\zeta = \max\{\xi, \eta\}$. Рассмотреть случай независимых и одинаково распределенных по закону Коши случайных величин ξ и η:

$$f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

12. Случайный вектор (ξ, η) имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, 0)$. Найти закон распределения полярных координат (ρ, φ) вектора (ξ, η).

13. Независимые случайные величины ξ и η имеют плотности вероятности $f_{\xi}(x)$ и $f_{\eta}(y)$. Найти математическое ожидание и дисперсию модуля их разности $\zeta = |\xi - \eta|$.

14. Совокупность двух случайных величин ξ и η описывается плотностью вероятности $f_{\xi\eta}(x, y)$. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\zeta = \min\{\xi, \eta\}$. Рассмотреть случай независимых ξ и η из датчика случайных чисел RND.

15. Случайная точка (ξ, η) распределена равномерно в единичном круге. Найти закон распределения случайной величины $\zeta = \eta/\xi$.

16. Компоненты скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ частицы, имеющей единичную массу, независимы друг от друга и распределены нормально с параметрами $(0, a^2)$. Найти закон распределения кинетической энергии частицы W и величины скорости $|\vec{v}|$.

17. Случайная точка A равномерно распределена на единичной сфере с центром в начале координат. Найти закон распределения проекций точки A на экваториальную плоскость и полярную ось сферы.

18. Найти закон распределения решения $\vec{\eta}$ линейной системы $\mathbf{A}\vec{\eta} = \vec{\xi} \quad (\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0})$, где вектор $\vec{\xi}$ распределен с плотностью $f_{\vec{\xi}}(\vec{x})$.

19. Неотрицательные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковые плотности вероятности $f_{\xi_i}(x) = e^{-x} \cdot 1(x)$. Найти плотности вероятности случайных величин: а) $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, б) $\eta_2 = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, в) $\eta_3 = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

ОТВЕТЫ

Занятие 7

1. а) $c_i+1|\, p_i$; б) $2c_i \mid p_i$; в) $c_i^2 \mid p_i^*$, $p_i^*=\sum\limits_j p_j\cdot 1_{\left\{c_i^2\right\}}\left(c_j^2\right)$.

2. $P\left\{\eta_1=k\right\}=0.1,\ k=0,1,2,...9$;
$P\left\{\eta_2=0\right\}=0.55$; $P\left\{\eta_2=1\right\}=0.45$. Да.

4. а) $F_\eta\left(y\right)=F_\xi\left(\left(y-\beta\right)/\alpha\right),\quad \alpha>0,\ F_\eta\left(y\right)=1-F_\xi\left(\left(y-\beta\right)/\alpha+0\right),\quad \alpha<0$; б) $F_\eta\left(y\right)=F_\xi\left(\sqrt[k]{y}\right),k=2n+1,\ F_\eta\left(y\right)=\left(F_\xi\left(\sqrt[k]{y}\right)-F_\xi\left(-\sqrt[k]{y}+0\right)\right)\cdot 1\left(y\right),k=2n$; в) $F_\eta\left(y\right)=\left(F_\xi\left(y\right)-F_\xi\left(-y+0\right)\right)\cdot 1\left(y\right)$; г) $F_\eta\left(y\right)=F_\xi\left(y\right)\cdot 1\left(y\right)$.

5. а) $f_\zeta\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}\left(z\mp t,t\right)dt$; б) $f_\zeta\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}\left(z/t,t\right)dt/\left|t\right|$;
в) $f_\zeta\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}\left(zt,t\right)\left|t\right|dt$.

6. $f_\eta\left(y\right)=f_\xi\left(\sqrt{1-y^2}/y\right)/\left(y^2\sqrt{1-y^2}\right)\cdot 1_{[0,1]}\left(y\right)$.

7. $F_\xi\left(x\right)=x/\sqrt{x^2+r^2}\cdot 1\left(x\right)$.

8. $f_\eta\left(y\right)=\left(1-y\right)\cdot 1_{\left[1-\sqrt{2},1\right]}\left(y\right)$.

9. $\eta=\cot\left(\pi e^{-\lambda\xi}\right)$.

10. $f_\beta\left(y\right)=n^2\sin 2y/\left(2\sqrt{1-n^2\sin^2 y}\right)\cdot 1_{\{0\le y<\arcsin 1/n\}}\left(y\right)$.

11. $f_\zeta\left(z\right)=\int\limits_{-\infty}^{z}f_{\xi\eta}\left(z,y\right)dy+\int\limits_{-\infty}^{z}f_{\xi\eta}\left(x,z\right)dx$.

12. $f_{\rho\varphi}\left(r,\phi\right)=r\exp\left\{-r^2/\sigma^2\right\}/2\pi\sigma^2,\quad r\ge 0, 0\le\phi\le 2\pi$.

13. $M\zeta=2M\left[\xi F_\eta\left(\xi\right)\right]+2M\left[\eta F_\xi\left(\eta\right)\right]-M\xi-M\eta$.

14. $f_\zeta\left(z\right)=-\int\limits_{z}^{\infty}f_{\xi\eta}\left(z,y\right)dy-\int\limits_{z}^{\infty}f_{\xi\eta}\left(x,z\right)dx$.

15. $f_\zeta\left(z\right)=1/\left[\pi\left(1+z^2\right)\right]$.

16. $f_W\left(y\right)=\left(2\sqrt{y/\pi}/a^3\right)\exp\left\{-y/a^2\right\}\cdot 1\left(y\right)$; $f_{|v|}\left(z\right)=\left(\sqrt{2/\pi}z^3/a^3\right)\exp\left\{-z^2/2a^2\right\}\cdot 1\left(z\right)$.

17. $f_\xi\left(\rho\right)=\left(\rho/\sqrt{1-\rho^2}\right)\cdot 1_{[0,1]}\left(\rho\right)$; $f_h\left(z\right)=1_{[-1,1]}\left(z\right)/2$.

18. $f_{\vec\eta}\left(\vec y\right)=f_{\vec\xi}\left(\mathbf{A}\vec y\right)\cdot\left|\det\mathbf{A}\right|$.

19. а)$\left[y^n e^{-y}/\left(n-1\right)!\right]\cdot 1\left(y\right)$; б) $ne^{-ny}\cdot 1\left(y\right)$; в) $ne^{-y}\left(1-e^{-y}\right)\cdot 1\left(y\right)$.

Занятие 8

АППАРАТ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. КОМПОЗИЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Характеристической функцией $\theta_\xi(u)$ случайной величины ξ называется математическое ожидание функции $\exp(iu\xi)$, где $u-$ вещественный аргумент:

$$\theta_\xi(u) = M\left\{e^{iu\xi}\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF_\xi(x).$$

Если х.ф. аналитическая, то начальные моменты с.в. ξ находятся по формуле

$$m_k = \frac{1}{i^k}\frac{d^k\theta_\xi(u)}{du^k}\,\Big|_{u=0}.$$

Х.ф. однозначно определяет функцию распределения. В частности, для непрерывной с.в. формула связи плотности вероятности $f_\xi(x)$ и х.ф. имеет вид:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\theta_\xi(u)\,du.$$

Характеристической функцией системы с.в. $(\xi_1, ...\xi_n)$ называется математическое ожидание функции $\exp\left\{i\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\xi_k\right\}$, где $u_1, ...u_n$ вещественны:

$$\theta_{\xi_1...\xi_n}(u_1, ...u_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}...\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} u_k x_k\right\} dF_{\xi_1...\xi_n}(x_1, ...x_n).$$

Х.ф. системы независимых с.в. $(\xi_1, ...\xi_n)$ равна произведению х.ф. величин, входящих в систему:

$$\theta_{\xi_1...\xi_n}(u_1, ...u_n) = \prod_{i=1}^{n}\theta_{\xi_i}(u_i).$$

Композицией законов распределения называется отыскание закона распределения суммы независимых с.в. по известным законам распределения слагаемых.

Для дискретных независимых с.в. ξ и η ряд распределения с.в. $\zeta = \xi + \eta$ дается формулой

$$P\{\zeta = z\} = \sum_j P\{\xi = x_j\}\,P\{\eta = z - x_j\}.$$

Для непрерывных независимых с.в. ξ и η плотность вероятности с.в. $\zeta = \xi + \eta$

$$f_\zeta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y)\,f_\xi(z-y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,f_\eta(z-x)\,dx.$$

1. Найти х.ф. случайной величины ξ , задаваемой рядом распределения $P\{\xi=1\}=P\{\xi=-1\}=1/2$.

2. С.в. ξ задается следующим рядом распределения

$$P\{\xi=1\}=P\{\xi=-1\}=1/4, \quad P\{\xi=0\}=1/2.$$

Определить х.ф. и начальные моменты с.в. ξ.

3. С.в. ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a,σ^2) . Найти ее х.ф.

4. Докажите, что функция $\theta(u)=\cos u^2$ не может быть характеристической.

5. Пусть ξ - целочисленная с.в. и $\theta_\xi(u)$ - ее х.ф. Показать, что

$$P\{\xi=k\}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-iku}\theta_\xi(u)\,du, \quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

6. Пусть $\theta(u)$ - х.ф. некоторой с.в. Могут ли $Re\,\{\theta(u)\}$ и $Im\,\{\theta(u)\}$ быть характеристическими функциями ?

7. Дискретная с.в. ξ подчиняется закону Пуассона:

$$P\{\xi=k\}=\frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad a>0, \quad k=0,1,2,...$$

Найти ее х.ф., а также математическое ожидание и дисперсию.

8. Случайная величина ξ имеет х.ф.

$$\theta_\xi(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

Найти начальные моменты и плотность вероятности с.в. ξ.

9. Какой случайной величине ξ соответствует характеристическая функция

$$\theta_\xi(u)=\frac{1}{2-e^{iu}}?$$

10. Найти х.ф. системы двух с.в. ξ_1 и ξ_2, подчиненных нормальному закону распределения с параметрами $(a_1,a_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$.

11. Пусть $(\xi_1,\xi_2,...\xi_n)$ - система зависимых нормальных случайных величин. Доказать, что с.в. $\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\xi_i+b$ $(a_1,a_2,...a_n, \quad b=const)$ также нормально распределена.

12. Смешаны две группы деталей, содержащие n_1 и n_2 деталей каждая. Число бракованных деталей в каждой группе (ξ и η соответственно) имеет биномиальное распределение:

$$P\{\xi = k\} = C_{n_1}^k p^k q^{n_1-k}, \qquad k = 0, 1, ...n_1,$$

$$P\{\eta = k\} = C_{n_2}^k p^k q^{n_2-k}, \qquad k = 0, 1, ...n_2.$$

Найти ряд распределения с.в. $\zeta = \xi + \eta$.

13. Определить плотность вероятности суммы двух независимых с.в., каждая из которых равномерно распределена в интервале (a, b).

14. Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределение Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad P\{\eta = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Найти ряд распределения с.в. $\zeta = \xi + \eta$.

15. Пусть с.в. $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ независимы и имеют распределение Коши:

$$f_{\xi_i}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + x^2} \qquad (a > 0), \quad i = 1, 2, ...n.$$

Как распределена с.в. $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i / n$?

16. Докажите, что функция $\theta(u) = \sqrt{1 - u^2} \cdot 1_{\{|u| \le 1\}}(u)$ не может быть характеристической.

Указание. Рассмотреть сумму двух независимых одинаково распределенных случайных величин ξ, η с предполагаемыми х.ф. $\theta(u)$.

ОТВЕТЫ

Занятие 8

1. $\theta_\xi(u) = \cos u$.
2. $\theta_\xi(u) = \cos^2(u/2)$; $\quad m_{2k-1} = 0, \quad m_{2k} = 1/2$.
3. $\theta_\xi(u) = \exp(iua - \sigma^2 a^2/2)$.
6. $Re\ \{\theta(u)\}$ может; $\quad Im\ \{\theta(u)\}$ нет.
7. $\theta_\xi(u) = \exp\{a(e^{iu} - 1)\}, \quad m_1 = a, \quad D\xi = a$.
8. $m_{2k-1} = 0, \quad m_{2k} = (2k)!; \quad f_\xi(x) = e^{-|x|}/2$.
9. Дискретной.
10. $\theta_{\xi_1\xi_2}(u_1, u_2) = \exp\{i(a_1u_1 + a_2u_2) - (\sigma_1^2u_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 r + \sigma_2^2u_2^2)/2\}$.
12. $P\{\zeta = k\} = C_{n_1+n_2}^k p^k q^{n_1+n_2-k}$.
13.
$$f_\xi(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0, \quad x \le 2a \\ \frac{x-2a}{(b-a)^2}, 2a \le x \le a+b \\ \frac{2b-x}{(b-a)^2}, a+b \le x \le 2b \\ 0, \qquad x \ge 2b \end{array} \right|$$
14. $P\{\varsigma = k\} = (2\lambda)^k e^{-2\lambda}/k!$.
15. По тому же самому закону.

Занятие 9

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Под предельными теоремами в теории вероятностей понимают целый класс теорем, указывающих условия возникновения тех или иных закономерностей в результате действия большого числа случайных факторов.

Определение. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность с.в. с конечными математическими ожиданиями. Будем говорить, что для нее выполнен закон больших чисел (ЗБЧ), если $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}M\xi_k}{n}\right| > \varepsilon\right\} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Теорема Маркова. Для того, чтобы последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ удовлетворяла ЗБЧ, достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}K_{\xi_i\xi_j}}{n^2} = 0.$$

Следствие (теорема Чебышева). Последовательность взаимно некоррелированных с.в. с равномерно ограниченными дисперсиями удовлетворяет ЗБЧ.

Определение. Последовательность с.в. с конечными дисперсиями подчиняется центральной предельной теореме (ЦПТ), если $\forall x \in \Re$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right)}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt.$$

Теорема Линдеберга-Леви. Последовательность одинаково распределенных независимых с.в. с конечными дисперсиями подчиняется ЦПТ.

Следствие (теорема Муавра-Лапласа). Для последовательности $\{\xi_n\}$ биномиальных с.в. с параметром p

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt.$$

На практике при конечных n вероятность нахождения числа появлений события в сегменте $[m_1, m_2]$ вычисляют по формуле

$$P\{m_1 < \xi_n < m_2\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{m_2 + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)\right\} \qquad (3)$$

где $\Phi(x) = \sqrt{2/\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-t^2/2\right)dt$ - функция Лапласа.

1. Пусть случайная величина η_n равна сумме очков при n подбрасываниях игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху вероятность:

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3.5\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

2. Вероятность появления события $\grave{A}$ в одном опыте равна 0.5. Можно ли с вероятностью, большей 0.97, утверждать, что число появлений $\grave{A}$ в 1000 независимых испытаний будет в пределах от 400 до 600?

3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что любая с.в. отклонится от своего математического ожидания менее, чем на 3σ, где σ - средне-квадратичное отклонение ξ.

4. Последовательности ξ_n, η_n и ζ_n взаимно независимых с.в. задаются рядами распределения их членов:

   (a)
   $$P\left[\xi_n = \pm 2^n\right] = \frac{1}{2};$$

   (b)
   $$P\left[\eta_n = \pm 2^n\right] = \frac{1}{2^{2n+1}}, \quad P\left[\eta_n = 0\right] = 1 - \frac{1}{2^{2n}};$$

   (c)
   $$P\left[\zeta_n = \pm n\right] = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad P\left[\zeta_n = 0\right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   Какие из них подчиняются ЗБЧ?

5. Дана последовательность независимых с.в. ξ_n, имеющих одну и ту же функцию распределения
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{a}.$$
Применим ли к ней ЗБЧ?

6. Можно ли интеграл
$$I = \int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx \qquad (a > 0)$$
после замены переменной $y = a/x$ вычислить методом Монте-Карло по формуле
$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k}\sin\frac{a}{y_k},$$
где y_k - случайные числа из интервала $[0, 1]$.

7. Вероятность появления события при одном испытании равна 0.3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота появлений этого события при 100 испытаниях будет лежать в пределах $0.2 - 0.4$?

8. Какова вероятность того, что в столбике из 100 монет число монет, расположенных орлом вверх, будет от 45 до 55?

9. Производство дает один процент брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет не больше 17?

10. Складываются 10 000 чисел, округленных с точностью до 10^{-m}. Предполагая ошибки округления независимыми и равномерно распределенными в интервале $(-0.5 \cdot 10^{-m}, 0.5 \cdot 10^{-m})$, найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0.99, будет лежать суммарная ошибка.

11. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Чему равен
$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right\} \ ?$$
Указание. См.задачу 8.14.

12. Пусть с.в. ξ представляет собой ряд
$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{2^i},$$
где $\{\xi_i\}$ −последовательность независимых с.в., принимающих значения 0 и 1 с вероятностями 0.5. Покажите, что с.в. ξ распределена равномерно в интервале $(0, 1)$.

Указание. В формуле
$$F_\xi\,(x) = P\,\{\xi < x\}$$
представить число x в двоичной форме.

ОТВЕТЫ

Занятие 9

1. $P \leq 8.75/n\varepsilon^2$.
2. Да.
3. $P \geq 8/9$.
4. $\{\eta_n\}$.
5. Нет.
6. Нет.
7. 0.96.
8. 0.6826.
9. 0.965.
10. $(-74.36 \cdot 10^{-m};\ 74.36 \cdot 10^{-m})$.
11. $\Phi(x)$.