1 ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.Краткий исторический очерк развития теории вероятностей.

Парадоксально, но факт ! Возникновение теории вероятностей стимулировали пороки общества. В XVII веке азартные игры породили множество комбинаторных задач, не укладывавшихся в существовавшие математические модели. При их решении потребовалось ввести новые понятия, подходы и идеи. Значительная их часть принадлежит Я.Бернулли, Муавру, Лапласу, Гауссу.

Подозревают, что развитие теории вероятностей как самостоятельной науки началось с переписки Паскаля и Ферма в 1654 году. К сожалению, полное содержание ее неизвестно, но косвенные данные позволяют судить об основных понятиях, которые в ней обсуждались. До этого периода отдельные вероятностные задачи решали Пачоли, Кардано и Галилей. В 1658 г. вышла книга Гюйгенса "О расчетах в азартных играх".

Следует, однако, заметить, что еще античные философы знали о вероятности. Древнегреческие математики высказывали мысль о том, что законы природы проявляются через множество случайных событий - это видно из поэмы Лукреция Кара "О природе вещей". Среди древних воинов пользовалась популярностью игра в кости. Каждой из 4-х подбрасываемых костей служил *таксиллус* - часть коленного сустава овцы. Эта первоначальная кость была далеко несимметрична, и одновременное выпадение четырех крайне редко выпадавших граней называли *Венерой*.

Вернемся снова в XVII век. С 1592 г. в Лондоне велись точные записи о смертности, и Дж.Граун в 1662 г. составил таблицы вероятности смерти как функции возраста. Ван Худде и Ван Витт в Голландии использовали аналогичные расчеты для вычисления пожизненной ренты. Галлей в 1693 г. изложил эти вопросы подробнее. Таким образом, новые понятия успешно применялись не только в азартных играх, но и в теории страхования.

В начале XVIII века появляется книга Якоба Бернулли "Искусство догадок" (1713), в которой содержались комментарии книги Гюйгенса и был сформулирован закон больших чисел. Абрахам де Муавр выпустил в 1711 г. труд "Об измерении случайности", где доказал очень мощную теорему - одну из центральных предельных теорем. Основополагающий труд Лапласа "Аналитическая теория вероятностей" подытожил итоги развития классической теории и дал толчок ее дальнейшему развитию.

К концу XVIII века успехи теории вероятностей стали настолько значительны, а ее задачи столь привлекательны, что ею начинает заниматься множество любителей. Теория вероятностей становится модной наукой, ее бездумно применяют в самых различных областях: экономике, социологии, юриспруденции. Все это не могло в конце концов не сказаться отрицательно. Несколько неверно предсказанных ситуаций, и одна крайность переходит в другую. Теорию вероятностей громогласно объявляют в начале XIX столетия лженаукой, даже вредной наукой. Интерес к ней в это время довольно быстро угасает.

Однако, в конце XIX века и в начале XX столетия стали появляться более серьезные запросы, вызванные нуждами естествознания. Была открыта молекулярная структура материи, и нужно было понять, как из хаотического движения огромного количества микрочастиц складываются макроскопические термодинамические законы. В этот период значительный вклад в развитие теории внесли Гаусс (предельные теоремы теории вероятностей), Леви (устойчивые распределения), а также российские ученые - Чебышев, Марков, Колмогоров. Аксиоматический подход построения теории вероятностей, предложенный в 1933 г. А.Н.Колмогоровым в книге "Основные понятия теории вероятностей", сделал ее настоящей математической наукой. В настоящее время аксиоматический подход является общепринятым. Заметим также, что данная область знаний вплоть до настоящего времени находится в состоянии интенсивного развития через свои приложения (случайные процессы, марковские процессы и др.).

2.Случайные явления.

Что же изучает теория вероятностей ? До ее возникновения объектом исследования были явления, в которых условия однозначно определяют исход. Например, если на материальную точку действует заданная сила, и в начальный момент заданы координаты и скорость частицы, то ее дальнейшее движение однозначно определяется соответствующим дифференциальным уравнением Ньютона. Однако, эта механическая модель не всегда удовлетворительно описывает реальные физические явления. Если рассматривать, например, движение пули, то ее траектория не определяется однозначно. Дело в том, что начальная скорость пули по многим причинам не остается постоянной при различных выстрелах. То же самое происходит при выпуске снарядов. Даже в случае одной и той же точки прицеливания невозможно точно указать, куда упадет снаряд. Неоднозначность здесь связана с тем, что мы не можем абсолютно точно знать параметры состояния атмосферы во всех точках траектории снаряда.

Если колебания значений начальной скорости и параметров атмосферы невелики (например, меньше погрешности, вносимой измерительными приборами), то можно использовать детерминированную механическую модель.

Неоднозначность исхода при сохранении основных условий опыта наблюдается для широкого круга явлений. При подбрасывании монеты или кубика мы не можем заранее предсказать исход. Результаты нескольких измерений одной и той же величины, полученные одним и тем же прибором в одних и тех же условиях, различны. Влияние очень большого числа разнообразных неконтролируемых факторов, каждый из которых в отдельности не может повлиять на результат опыта, приводит к непредсказуемости его результата. Подобные явления, исход которых заранее предсказать нельзя по тем или иным причинам, называют *случайными явлениями.*

Таким образом, в объекте теории вероятностей уже заложена некоторая неопределенность. Однако, это вовсе не означает принципиальную невозможность познать данное явление. Из этого следует лишь то, что мы не располагаем достаточными сведениями о механизмах, управляющих данным явлением.

Важно отметить, что в природе почти не существует точных детерминированных количественных законов. Так, например, закон о зависимости давления идеального газа от температуры - результат случайного характера числа соударений частиц о стенки сосуда и скоростей этих частиц. Просто в области обычных температур и давлений случайные отклонения от закона очень малы и не фиксируются нашими приборами. Здесь случайность связана с *атомарной структурой материи.*

Если же мы будем следить за отдельной микрочастицей, то здесь проявляется иная неопределенность. Она связана с *квантовомеханическими законами движения* и является отражением реальной природы вещей. Если мы знаем импульс частицы, то не знаем ее точного местоположения. Ядро радиоактивного атома может распасться в любой момент времени, и эта случайность увеличением наших познаний устранена быть не может.

При экспериментальном изучении какого-либо явления с целью установления его закономерностей приходится наблюдать его многократно в одинаковых условиях. При этом под одинаковыми условиями мы понимаем одинаковые значения всех количественных характеристик контролируемых факторов. Все неконтролируемые параметры будут при этом различными. Наблюдения, проводимые при некотором комплексе условий, который удается многократно в точности воссоздать, называют *статистическим экспериментом* (опытом, испытанием). Всякий факт, происхождение или непроисхождение которого однозначно фиксируется в условиях данного эксперимента, называют *случайным событием* или просто *событием.*

К событиям относятся: выпадение герба на монете, выпадение трех очков при бросании кубика, попадание в "яблочко" при выстреле в мишень, вспыхивание спички при чиркании ею о спичечный коробок и др.

Понятие события в теории вероятностей является таким же базовым неопределимым понятием как понятие множества в математическом анализе, понятие точки и прямой в геометрии.

3.Статистическое (эмпирическое) определение вероятности.

Возникает вопрос: какой величиной характеризовать введенные случайные события ? Как их количественно отличать одно от другого, зная, например, что одно происходит реже другого ? Этой величиной является *вероятность* события. Интуитивное понятие вероятности связано с индуктивными умозаключениями и суждениями типа: "Павел, вероятно, счастливый человек", "Гипотеза Ферма, вероятно, ошибочна". Суждения такого рода интересны философам и логикам. Мы же будем иметь дело не с модальностями индуктивных умозаключений, а с тем, что можно назвать физической или *статистической вероятностью*, т.е. с тем, что относится к возможным исходам мыслимого эксперимента.

Предположим, что в некотором статистическом эксперименте мы следим за появлением события A (все события далее будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита). Допустим, что проведено n испытаний, в m из которых произошло событие A. Введем в рассмотрение величину $\nu_n(A) = m/n$ - *относительную частоту* появления события A. На основании длительных наблюдений за результатами большого числа различных испытаний была обнаружена удивительная *устойчивость* относительной частоты события: в различных сериях испытаний эти величины мало отличались друг от друга, причем указанные отличия были тем меньше, чем больше испытаний проводилось.

Так, например, относительная частота рождения мальчиков мало отличается от 0.515, и это значение слабо зависит от местности или от этнического состава населения. Относительная частота распада атома Ra^{226} за 100 лет составляет приблизительно 0.04184. В последнем случае число испытаний совпадает с числом находящихся под наблюдением атомов радия в образце ($N = 10^{23} \div 10^{24}$).

Обратимся к эксперименту с подбрасыванием симметричной монеты. Построим график зависимости относительной частоты выпадения герба ν_n от числа проведенных испытаний n. Нанося точки и соединяя их ломаной линией, легко заметить, что график очень быстро прижимается к горизонтальной прямой: $\nu_n = 1/2$. Чтобы проверить это обстоятельство, Бюффон в XVIII веке провел 4040 бросаний монеты. Герб выпал 2048 раз, что дало $\nu = 0.508$. Пирсон произвел уже 24000 подбрасываний. Герб появился в 12012 испытаниях и относительная частота ν составила 0.5005.

Итак, мы подошли вплотную к самому главному понятию теории - понятию *вероятности* случайного события. В *статистическом* смысле под вероятностью события понимается объективно существующая величина P, около которой группируются относительные частоты этого события. В силу того, что $0 \leq \nu_n(A) \leq 1$, для любого события величина $P \in [0, 1]$. В математическом смысле определение P как предела ν_n при $n \to \infty$ нельзя назвать строгим (это определение приписывают немецкому математику и механику Мизесу). Дело в том, что последовательности $\{\nu_n\}$ будут различными для разных серий экспериментов. С другой стороны, на практике мы всегда имеем дело не с последовательностью относительных частот, а с их конечным набором.

4.Пространство элементарных событий. Классическая схема исчисления вероятностей.

Для математического описания экспериментов со случайными исходами введем понятие *пространства элементарных событий.* Таким пространством мы будем называть любое множество Ω взаимоисключающих исходов эксперимента, причем каждый интересующий нас результат эксперимента может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества. Элементы пространства Ω будем обозначать буквой ω и называть *элементарными событиями* (мыслимыми исходами, шансами). Ввиду большого разнообразия случайных явлений нельзя дать более конкретное представление о пространстве элементарных событий. Это понятие неопределяемо, оно исходно как, например, понятие точки в геометрии. Для описания каждой реальной задачи множество Ω выбирается наиболее подходящим образом.

О каком-либо событии A имеет смысл говорить только тогда, когда для каждого мыслимого исхода опыта известно, произошло или не произошло событие A. Совокупность точек, представляющих все те исходы, при которых событие A происходит, полностью описывает это событие. Говорят, что эти исходы *благоприятствуют* событию A. Поэтому событием называют любое измеримое подмножество пространства Ω: $A \subset \Omega$. Термины "событие" и "элементарное событие" равносильны терминам "точечное множество" и "точка". События, содержащие более одного элементарного события, принято называть *составными.* Пространство Ω, содержащее конечное или счетное число элементарных событий, называют *дискретным.*

Рассмотрим ряд примеров, поясняющих выбор множества Ω.

1.*Однократное подбрасывание монеты.* Возможными исходами в этом опыте будут: падение монеты гербом вверх, выпадение решетки, постановка монеты на ребро, западание монеты в щель и т.д. При математическом описании опыта естественно отвлечься от ряда несущественных взаимоисключающих исходов и ограничиться лишь двумя первыми: ω_g - выпадение герба, ω_r - выпадение решетки. Таким образом, в этом опыте

$$\Omega = \{\omega_g, \omega_r\}\,.$$

2.*Подбрасывание игральной кости один раз.* Здесь по аналогии с предыдущим примером естественно предположить, что пространство Ω содержит шесть элементарных событий:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}\,,$$

где под ω_k понимается исход опыта, заключающийся в выпадении k очков на кубике.

3.*Подбрасывание монеты n раз.* В этом опыте каждое элементарное событие представляет собой последовательность гербов и решеток:

$$\omega = \underbrace{GGRGRR\dots RG}_{n}\,.$$

Полное число мыслимых исходов, входящих в Ω, равно 2^n.

4.*Однократный выстрел в мишень.* Каждому элементарному событию здесь отвечает точка мишени, куда попадает пуля после выстрела, либо точка, лежащая вне мишени ("молоко"). Такое пространство Ω несчетно. Однако, если нас интересует лишь количество выбиваемых очков, то в качестве Ω можно выбрать дискретное пространство, состоящее из 11-ти мыслимых исходов $\omega_k, \quad k = \overline{0,10}$. Здесь ω_k - выбивание k очков при одном выстреле.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω, состоящее из конечного числа n исходов: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Пусть интересующему нас событию A благоприятствуют какие-то k из них:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\dots, \omega_{i_k}\}\,.$$

Если заранее нельзя отдать предпочтение ни одному из исходов по отношению к другим, то для подсчета вероятности события A используется *классическая схема*:

$$P\left(A\right) = \frac{k}{n}.$$

Заметим, что эта схема расчета была известна еще в XVII веке.

Приведем ряд примеров.

1.Определим вероятность события A - выпадения нечетного числа очков при однократном подбрасывании кубика. Как мы уже отмечали, пространство Ω состоит из шести исходов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}\,.$$

Событию A благоприятствуют три исхода: $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. Поэтому,

$$P\left(A\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2.*Задача о днях рождения.* Какова вероятность того, что в наугад выбранной студенческой группе из m человек нет совпадающих дней рождения.

На первый взгляд, поставленная задача кажется трудноразрешимой, поскольку количество дней в году разное, а рождаемость зависит от времени года. Мы будем решать задачу в предположении, что в каждом календарном году ровно 365 дней, а рождаемость остается примерно постоянной на протяжении всех временных сезонов. В данной задаче элементарным исходом ω следует считать конкретное распределение дней рождения студентов по дням календарного года. Подсчитаем общее число n элементарных событий в пространстве Ω. Поскольку день рождения каждого из m студентов может прийтись на любой из 365 дней, то

$$n = \underbrace{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}_{m} = 365^m.$$

Число благоприятствующих исходов k находим последовательным "бросанием" дня рождения каждого из студентов на дни календарного года. При этом нельзя "бросать" дважды в одну и ту же "ячейку". Поэтому,

$$k = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot [365 - (m-1)] \, .$$

По классической схеме определяем вероятность интересующего нас события

$$P = \frac{k}{n} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot [365 - (m-1)]}{365^m} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{m-1}{365}\right).$$

Полученную формулу можно записать в более удобном для расчетов виде. Воспользуемся приближенным соотношением:

$$e^{-z} \simeq 1 - z, \quad |z| \ll 1.$$

Тогда,

$$P \simeq e^{-1/365} \cdot e^{-2/365} \cdot \ldots \cdot e^{-(m-1)/365} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{365}\left[1 + 2 + \ldots + (m-1)\right]\right\}.$$

Или окончательно

$$P \simeq e^{-m(m-1)/730}.$$

Данной формулой можно пользоваться для расчетов при условии: $m \ll 365$. Так, для $m = 10$, $P \simeq 0.88$; для $m = 15$, $P \simeq 0.75$; для $m = 20$, $P \simeq 0.6$; для $m = 25$, $P \simeq 0.44$; для $m = 30$, $P \simeq 0.3$. Как видно из приведенных цифр, вероятность довольно быстро убывает, и в группе из 23 студентов уже вероятнее обнаружить совпадающие дни рождения. Это весьма неожиданный результат. Задачами, в которых интуиция порой отказывает, теория вероятностей очень богата.

5.Выборки с возвращением и без возвращения. Гипергеометрическое распределение.

Пусть задано множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, которое назовем *генеральной совокупностью. Выборкой объема* k из генеральной совокупности называется упорядоченная последовательность $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$. Эту последовательность можно образовать по разному.

Первый способ.

Первый элемент a_{i_1} выберем из всей генеральной совокупности, следующий элемент a_{i_2} - из генеральной совокупности без элемента a_{i_1}, элемент a_{i_3} - из генеральной совокупности без элементов a_{i_1} и a_{i_2} и т.д. Полученные таким образом выборки называются *выборками без возвращения.* Совершенно ясно, что в этом способе $k \leq n$. Число выборок без возвращения совпадает с числом *размещений* из n по k:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\,.$$

Каждой выборке без возвращения можно приписать по классической схеме вероятность $1/A_n^k$. Выборку без возвращения наглядно можно представить как последовательный выбор из совокупности n пронумерованных шаров, находящихся в урне. Вынутые шары в урну не возвращаются.

Второй способ.

Его можно пояснить на примере той же урны с пронумерованными шарами. Из урны вынимают шар и запоминают его номер. Затем шар возвращают в урну и снова достают шар. Номер вынутого шара опять запоминают и шар опускают обратно. И т.д. Полученная таким способом выборка называется *выборкой с возвращением.* Здесь уже возможно, что k может превышать n. При этом в выборке с возвращением обязательно окажутся одинаковые элементы из генеральной совокупности. Поскольку при каждом доставании может быть выбран любой из n шаров, то число выборок с возвращением равно n^k. По классической схеме каждой такой выборке следует приписать вероятность $1/n^k$.

Подсчитаем вероятность того, что в выборке с возвращением объема $k \leq n$ все элементы различны. Выборок с неповторяющимися элементами будет ровно столько же, сколько выборок без возвращения, т.е. A_n^k. Поэтому искомая вероятность

$$P = \frac{A_n^k}{n^k}.$$

Этот прием мы применили при решении задачи о днях рождения.

Вернемся к выборке без возвращения из генеральной совокупности $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Подсчитаем число выборок объема k, отличающихся только составом элементов. Число выборок без возвращения объема k, имеющих одинаковый состав и различающихся только порядком элементов, равно $k!$ (число перестановок). Поэтому число выборок, различающихся составом, будет в $k!$ раз меньше A_n^k, т.е.

$$\frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Полученное число - число *сочетаний* из n по k. Вероятность получения подобной выборки по классической схеме есть $1/C_n^k$.

Пусть в урне из n шаров имеется двухцветный набор: n_1 черных и $n-n_1$ белых шаров. Производится выборка без возвращения объема k. Определим вероятность того, что в этой выборке будет ровно k_1 черных шаров ($k_1 \le k$).

Как было показано, число выборок, отличающихся составом, есть C_n^k. Количество способов, которыми можно выбрать k_1 шаров из n_1 черных, равно, следовательно, $C_{n_1}^{k_1}$. Остальные $(k-k_1)$ белых шаров из $(n-n_1)$ белых шаров можно выбрать $C_{n-n_1}^{k-k_1}$ способами. При этом любой выбор черных шаров может сочетаться с любым выбором белых. Значит, по классической схеме искомая вероятность равна

$$P_{n_1,n}(k_1,k) = C_{n_1}^{k_1} C_{n-n_1}^{k-k_1} / C_n^k.$$

Набор чисел $P_{n_1,n}(0,k), P_{n_1,n}(1,k), \ldots, P_{n_1,n}(k,k)$ образует так называемое *гипергеометрическое распределение.* Из полученной формулы следует соотношение ($0 < n_1 < n$):

$$\sum_{k_1=0}^{k} C_{n_1}^{k_1} C_{n-n_1}^{k-k_1} = C_n^k.$$

На практике гипергеометрическое распределение встречается в задаче подсчета выигрыша в игре "Спортлото 6 из 45", "Спортлото 5 из 36". Действительно, если Вы зачеркнули в карточке какие-либо 6 номеров, то это означает, что Вы мысленно "раскрасили" 6 соответствующих шаров в лототроне. Теперь для угадывания ровно k из зачеркнутых номеров нужно, чтобы при тираже выпали какие-либо k шаров из раскрашенных 6-ти, а остальные $(6-k)$ из нераскрашенных 39-ти. Поэтому вероятность угадывания k номеров в лотерее "Спортлото 6 из 45" равна:

$$P_{6,45}(k,6) = C_6^k C_{39}^{6-k} / C_{45}^6.$$

6.Распределение частиц по ячейкам. Статистики Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака.

Широкую применимость на практике имеет модель случайного размещения r шаров по n ящикам. Так, в статистической механике для системы, состоящей из большого числа частиц (например, для газа) объем Γ фазового пространства (шестимерного пространства координат и импульсов), в котором могут находиться частицы, ограничен. Его разбивают на большое число малых областей или ячеек. В результате, состояние всей системы описывается как случайное размещение r частиц по n ячейкам.

Определим вероятность того, что при случайном размещении r частиц по n ячейкам в первой ячейке окажется ровно r_1 частиц, во второй - r_2 частиц и т.д., в n-ой ячейке - r_n частиц. При этом, очевидно, должно выполняться соотношение:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = r \qquad\qquad (0 \le r_k \le r).$$

На первый взгляд кажется, что все мыслимые n^r размещений частиц равновероятны. Если предположить, что это так, то для подсчета вероятности можно использовать классическую схему. Число благоприятствующих исходов легко сосчитать, выбрав некоторое благоприятное распределение с числами заполнения $r_1, r_2, \ldots, r_n$ соответственно, а затем произведя всевозможные перестановки частиц. Всего таких перестановок - $r!$, но нужно учесть то обстоятельство, что при перестановках частиц внутри одной ячейки мы не получаем нового размещения. Поэтому число $r!$ необходимо уменьшить в $r_1!r_2!\ldots r_n!$ раз. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P = \frac{r!}{n^r \cdot r_1!r_2!\ldots r_n!}.$$

Полученная формула характерна для так называемой *статистики Максвелла-Больцмана.* Делались многочисленные попытки доказать, что физические частицы ведут себя в соответствии с этой статистикой. Однако, современная теория показывает, что статистика Максвелла-Больцмана не применима ни к каким известным частицам в силу *принципиальной неразличимости* последних.

Были введены две различные вероятностные модели, каждая из которых удовлетворительно описывает поведение некоторого класса частиц. В *статистике Бозе-Эйнштейна* все частицы считаются принципиально неразличимыми, причем в каждой ячейке может находиться любое число частиц. Совершенно ясно, что в такой статистике имеется всего один благоприятствующий исход, отвечающий числам заполнения $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Подсчитаем общее количество различимых размещений неразличимых частиц. Для этого применим следующий наглядный прием. Выстроим все ячейки в горизонтальный ряд. Тогда внутри окажется $(n-1)$ перегородок, символизирующих границы ячеек. Размещенные частицы также расположим по горизонтали. Частица считается находящейся в ячейке, если она оказалась между перегородками данной ячейки. Таким образом, внутри двух "закрепленных" внешних перегородок находятся r частиц и $(n-1)$ перегородок. Новые размещения мы будем получать только в том случае, когда будем менять местами частицу и перегородку. Количество таких различимых размещений совпадает с числом сочетаний C^r_{n+r-1}. Действительно, если места, занимаемые частицами и перегородками мысленно занумеровать, то число различимых размещений - это неупорядоченный выбор r мест для частиц из совокупности $(n+r-1)$ номеров. В итоге, находим вероятность интересующего нас события:

$$P = \frac{1}{C^r_{n+r-1}}.$$

Заметим, что здесь вероятность уже не зависит от чисел заполнения $r_1, r_2, \ldots, r_n$. В физике статистике Бозе-Эйнштейна подчиняются фотоны, атомные ядра и атомы, содержащие четное число элементарных частиц.

Другая статистика - *статистика Ферми-Дирака* основана на следующих двух предположениях относительно принципиально неразличимых частиц: 1) в одной ячейке не могут находиться две и более частиц; 2) все различимые размещения, удовлетворяющие первому условию, равновозможны. В этой статистике числа заполнения $r_i = 0, 1$, причем общее число размещаемых частиц $r \leq n$. Количество благоприятствующих исходов здесь также равно 1, а полное количество различимых размещений C^r_n - числу выборок без возвращения, различающихся составом номеров ячеек, в которые попали частицы. Отсюда,

$$P = \frac{1}{C_n^r}.$$

В физике статистикой Ферми-Дирака описываются электроны и нуклоны.

В классических задачах с неразличимостью мы сталкиваемся тогда, когда интересуемся числом событий, а не ими самими. Например, при бросании нескольких игральных костей обычно интересуются общим числом выпавших очков, числом единиц, двоек и т.д. Бросание двух монет эквивалентно размещению двух "частиц" по двум "ячейкам" (герб, решетка). Для различимых монет вероятность выпадения двух гербов равна 1/4, для неразличимых - 1/3.

7.Геометрическая схема определения вероятности.

Классическую схему определения вероятности нельзя применять в ситуации, когда число равноправных исходов бесконечно велико. Здесь применяется другая схема - *геометрическая.* Смысл ее таков. Пусть пространство элементарных событий Ω, состоящее из бесконечного числа точек - исходов, представляет собой ограниченное измеримое множество в некотором евклидовом пространстве $\Re^m$. Будем предполагать, что Ω имеет объем $mes\,(\Omega)$. Любое событие A состоит из благоприятствующих ему исходов ω, т.е. является подмножеством $\Omega : A \subset \Omega$. За вероятность события A принимают отношение:

$$P\,(A) = \frac{mes\,(A)}{mes\,(\Omega)}.$$

В геометрической схеме исчисления вероятностей выбор модели, подходящей для описания реального явления, менее очевиден. В разных моделях для одного и того же события можно получить различные вероятности. На выборе разных математических моделей основан известный *парадокс Бертрана.*

Задача Бертрана формулируется так: в круге радиуса R случайно проводится хорда. Какова вероятность того, что длина хорды окажется больше радиуса окружности ? В этой задаче искомая вероятность зависит от интерпретации слов "случайно проводится", поэтому ее значения могут быть различными. В этом, собственно, и состоит парадокс. Мы не будем здесь обсуждать парадокс Бертрана, а рассмотрим исторически одну из первых задач на геометрическую схему.

Пример. *Задача Бюффона.*

Тонкая игла длины $2l$ бросается наудачу на плоскость, расчерченную горизонтальными прямыми, отстоящими на расстояние $2a$ друг от друга $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-либо из линий.

Введем два параметра, характеризующие положение иглы на плоскости. За x обозначим расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, а за φ - угол, составляемый иглой с направлением горизонтальных линий. Совершенно ясно, что пространство элементарных событий Ω содержит бесчисленное множество исходов, задаваемых парой чисел (x, φ), и представляет собой прямоугольник на плоскости параметров x, φ: $\Omega = \{(x, \varphi) : 0 \le x \le a, 0 \le \varphi \le \pi\}$. Интересующему нас событию A благоприятствуют исходы, образующие точечное множество, лежащее внутри Ω:

$A = \{(x, \varphi) : 0 \leq x \leq l \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. Согласно геометрической схеме, вероятность события A должна вычисляться как отношение площадей точечных множеств:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = \frac{l}{\pi a} (-\cos \varphi) \mid_0^{\pi} = \frac{2l}{\pi a}.$$

С полученным результатом связан довольно интересный прием проверки адекватности математической модели. По статистическому определению вероятность пересечения какой-либо из линий можно экспериментально оценить по относительной частоте события

$$P(A) \approx \frac{m}{n},$$

где n - число бросаний иглы, m - число испытаний, в которых произошло пересечение. Поэтому,

$$\frac{m}{n} \approx \frac{2l}{\pi a},$$

откуда

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{n}{m}.$$

На сравнении правой части с числом π и основан экспериментальный прием правильности результата расчетов.

В 1850 г. Вольф произвел 5000 бросаний иглы, получил 2532 пересечений, что при отношении $l/a = 0.8$ дало значение 3.1596. В 1925 г. Рейна повторил опыт: $n = 2520, m = 859, l/a = 0.5419$ и получил 3.1795.

8.Алгебра событий.

Случайные события будем далее обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \ldots$. Введем действия над событиями.

1.*Суммой* событий A и B будем называть новое событие, обозначаемое символом $A \cup B$ $(A + B)$ и состоящее в том, что происходит хотя бы одно из событий A и B. Эту операцию, как и все последующие, удобно пояснить с помощью *диаграмм Эйлера-Венна.* Допустим, что событие A - попадание точки в круг A на плоскости, а событие B - попадание точки в другой круг B, пересекающийся с кругом A. Тогда событие $A \cup B$ заключается в попадании точки в область плоскости, ограниченную кругами A и B.

2.*Произведением* событий A и B назовем новое событие AB $(A \cap B)$, состоящее в том, что происходит и событие A и событие B.

3.*Разностью* событий A и B называют новое событие $A \backslash B$, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит.

4.*Симметрической разностью* событий A и B называют событие $A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Здесь A и B входят симметрично - отсюда и название действия.

В теории вводят еще два вспомогательных события. Событие, которое всегда происходит, т.е. которому благоприятствуют все мыслимые исходы опыта, называют *достоверным.* Ясно, что пространство элементарных событий Ω и есть достоверное событие. Событие, которое никогда не происходит, т.е. которому не благоприятствует ни один из исходов ω, называют *невозможным.* Его обозначают символом пустого множества $\emptyset$.

События A и B *несовместны*, если $AB = \emptyset$. Поскольку все мыслимые исходы опыта являются взаимоисключающими (несовместными) событиями, то $\omega_i \omega_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Теперь мы можем записать на математическом языке благоприятствование исходов $\omega_{i_1}, \omega_{i_2} \ldots, \omega_{i_k}$ событию A:

$$A = \omega_{i_1} \cup \omega_{i_2} \cup \cdots \cup \omega_{i_k}.$$

Событием, *противоположным* событию A, называют событие $\overline{A}$, состоящее в том, что A не происходит. Ясно, что $\overline{A} = \Omega \backslash A$. Соотношение $A \subset B$ называют *причинно-следственной связью* событий. Оно означает, что при наступлении события A наступает и событие B. Событие A называют *причиной*, а событие B - *следствием.* Ясно, что исходы опыта, благоприятствующие событию A, благоприятствуют одновременно и событию B. На языке диаграмм Эйлера-Венна это означает, что круг A находится внутри круга B. Поэтому точка, попавшая в круг A, одновременно попадает и в круг B.

Для действий над событиями справедливы формулы теории множеств:

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA \text{ - коммутативность,}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,, \quad (AB)\,C = A\,(BC) \text{ - ассоциативность,}$$

$$(A \cup B)\,C = (AC) \cup (BC)\,, \quad (AB) \cup C = (A \cup C)\,(B \cup C) \text{ - дистрибутивность,}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ - принцип двойственности.}$$

Справедливы также следующие простые формулы:

$$A \cup A = A, AA = A, A\overline{A} = \emptyset, \overline{\overline{A}} = A, A \backslash A = \emptyset, A \cup \overline{A} = \Omega.$$

Определение. Система подмножеств $\Im$ пространства элементарных событий Ω называется *алгеброй*, если:

1) $\Omega \in \Im$;

2) для $\forall A, B \in \Im : A \cup B \in \Im, AB \in \Im$;

3) для $\forall A \in \Im : \overline{A} \in \Im$.

Таким образом, алгебра событий $\Im$ - это класс помножеств Ω, замкнутый относительно конечного числа операций сложения, умножения и дополнения. Результат операции вычитания также попадает в $\Im$, поскольку $A \backslash B = A\overline{B} \in \Im$.

Nota bene. Заметим, что в п.2 достаточно потребовать выполнения одного из двух условий. В самом деле, в силу принципа двойственности: $AB = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$.

Примеры.

1.Наименьшей системой подмножеств, являющейся алгеброй, служит $\Im = \{\Omega, \emptyset\}$. Действительно,

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega, \quad \Omega \cdot \emptyset = \emptyset, \quad \bar{\Omega} = \emptyset.$$

2.Построим алгебру событий в эксперименте с однократным подбрасыванием симметричной монеты. Здесь, как известно, пространство элементарных событий состоит всего из двух исходов: $\Omega = \{\omega_g, \omega_r\}$. Произведем действия над ω_g и ω_r:

$$\omega_g \cup \omega_r = \Omega, \quad \omega_g \omega_r = \emptyset, \quad \overline{\omega_g} = \omega_r.$$

Отсюда видно, что если построить систему подмножеств Ω, включив туда Ω и $\emptyset$, то получим алгебру. Таким образом, здесь в алгебру входит 4 события: $\Im = \{\omega_g, \omega_r, \Omega, \emptyset\}$.

3.Если пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ - конечное множество, то система всех его подмножеств $\Im$ будет также конечным множеством. Здесь можно выписать все события алгебры $\Im$ и сосчитать их количество. В алгебру следует включить невозможное событие $\emptyset$, все элементарные события $\omega_1, \ldots, \omega_n$, составные события, состоящие из всевозможных пар взаимоисключающих исходов $\{\omega_i, \omega_j\}$, затем - из всевозможных троек исходов $\{\omega_i, \omega_j, \omega_k\}$ и т.д. вплоть до события, содержащего все исходы, - достоверного $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Поэтому, число событий M, входящих в алгебру, равно

$$M = 1 + n + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + 1 =$$

$$= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

4.Сложнее обстоит дело, когда пространство элементарных событий состоит из несчетного количества исходов. Допустим, что пространством Ω является единичный квадрат на плоскости: $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$. Это множество квадрируемо, т.е. имеет площадь. Однако, существуют подмножества Ω, которые не являются квадрируемыми фигурами. В то же время, из математического анализа известно, что операции объединения, пересечения и дополнения до Ω квадрируемых фигур дают снова квадрируемые фигуры. Поэтому система квадрируемых подмножеств квадрата Ω образует алгебру $\Im$.

В случае пространства Ω со счетным, либо несчетным количеством исходов ω понятия суммы и произведения переносятся на бесконечные последовательности событий $\{A_n\}$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

При этом введенное понятие алгебры событий требует обобщения.

Определение. Система подмножеств $\widetilde{\mho}$ множества Ω называется *сигма-алгеброй*, если:

1) $\Omega \in \widetilde{\mho}$;

2) для $\forall \{A_n\} \in \widetilde{\mho} : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{\mho}, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{\mho}$;

3) для $\forall A_n \in \widetilde{\mho} : \overline{A_n} \in \widetilde{\mho}$.

Таким образом, сигма-алгебра - это класс помножеств Ω, замкнутый относительно счетного числа операций сложения и произведения. Если задано множество Ω и какая-нибудь алгебра $\Im$ или сигма-алгебра $\widetilde{\mho}$ его подмножеств, то говорят, что задано *измеримое пространство* $\left\langle \Omega, \widetilde{\mho} \right\rangle$. Сигма-алгебра выделяет класс событий, а множества, не входящие в $\widetilde{\mho}$, событиями не являются.

Рассмотрим все сигма-алгебры, содержащие интервалы на числовой оси. Легко видеть, что пересечение всех таких сигма-алгебр снова образует сигма-алгебру. Это есть минимальная сигма-алгебра, содержащая интервалы. Ее называют *борелевской*.

Определение.

Назовем сигма-алгебру $\widetilde{\mho}^*$ *минимальной сигма-алгеброй*, порожденной $\widetilde{\mho}$, если любая другая сигма-алгебра, содержащая множества из $\widetilde{\mho}$, содержит также все множества из $\widetilde{\mho}^*$.

Борелевскую сигма-алгебру можно представлять себе как совокупность множеств, полученных из интервалов с помощью счетного числа операций объединения, пересечения и взятия дополнений. Это весьма богатый класс множеств, заведомо достаточный для практических целей.

9.Аксиоматика теории вероятностей. Вероятностное пространство.

Теперь мы вплотную подошли к тому, чтобы дать строгое аксиоматическое определение вероятности, которое бы сохраняло все основные свойства относительной частоты события. Такую задачу решил в XX веке русский математик А.Н.Колмогоров.

Вероятностью P на измеримом пространстве $\langle \Omega, \Im \rangle$ называется числовая функция, определенная на множествах из алгебры событий $\Im$ и обладающая следующими свойствами:

$A1$. Для $\forall A \in \Im : P(A) \geq 0$.

$A2$. $P(\Omega) = 1$.

$A3$. *Аксиома конечной аддитивности.*

Для $\forall A, B \in \Im$, таких, что $AB = \emptyset$

$$P(AB) = P(A) + P(B).$$

Для решения задач, связанных с последовательностями событий, приведенные три аксиомы дополняют аксиомой непрерывности, заменяя алгебру $\Im$ на сигма-алгебру $\widetilde{\mho}$.

$A4$. Для любой убывающей последовательности событий $\{A_n\} \in \widetilde{\mho}$:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

такой, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0.$$

Приведенная система аксиом является неполной и непротиворечивой. В настоящее время данная аксиоматика общепринята.

Поясним обоснованность сформулированных аксиом с точки зрения относительной частоты события. Аксиома $A1$ понятна, поскольку относительная частота события A также неотрицательна: $\nu_n(A) \geq 0$.

Если событие достоверное, то оно происходит в каждом испытании. Значит, $\nu_n(\Omega) = n/n = 1$, что согласуется с аксиомой $A2$.

Для пояснения смысла третьей аксиомы $A3$ рассмотрим пару событий A и B, которые вместе произойти не могут: $AB = \emptyset$. Допустим, что в n испытаниях событие A появилось m раз, а событие B - k раз. Тогда в силу несовместности A и B событие $A \cup B$ появится $m + k$ раз. В результате, его относительная частота

$$\nu_n(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

Это равенство показывает обоснованность аксиомы $A3$ для несовместных событий.

С другой стороны, классическая формула подсчета вероятности также должна вытекать из сформулированных аксиом. Рассмотрим пространство элементарных событий Ω с конечным числом исходов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Пусть интересующему нас событию A благоприятствуют какие-то k из них: $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$. Совершенно ясно, что аксиома $A3$ конечной аддитивности справедлива для любого конечного числа попарно несовместных событий. Поскольку исходы определяются как взаимоисключающие события: $\omega_i \omega_j = \emptyset \quad (i \neq j)$, то:

$$P(A) = P(\omega_{i_1} \cup \omega_{i_2} \cup \ldots \cup \omega_{i_k}) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k},$$

где $p_m = P(\omega_m)$ - вероятность исхода ω_m. Аналогично

$$P(\Omega) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \ldots \cup \omega_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

В силу аксиомы $A2$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Если нельзя отдать предпочтение ни одному из исходов, то следует считать все вероятности p_i одинаковыми: $p_i = p \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. Это дает

$$P(A) = k \cdot p$$

и с учетом

$$p \cdot n = 1$$

классическую формулу

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Может создаться обманчивое впечатление, что для вычисления вероятности любого события достаточно задать вероятности исходов. Однако, это не так, поскольку в геометрической схеме, например, все $P(\omega) = 0$.

Следует заметить, что аксиому конечной аддитивности $A3$ и аксиому непрерывности $A4$ иногда заменяют эквивалентной им аксиомой счетной аддитивности.

$H3$. Аксиома счетной аддитивности. Для любой последовательности $\{A_n\}$ попарно несовместных событий $A_iA_j = \emptyset \quad (i \neq j)\,; \{A_n\} \in \widetilde{\mho}$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right).$$

Докажем эквивалентность аксиом $A3, A4$ аксиоме $H3$.

Доказательство:

$\boxed{\Longrightarrow}$ рассмотрим последовательность $\{A_n\}$ попарно несовместных событий $A_iA_j = \emptyset \quad (i \neq j)\,; \{A_n\} \in \widetilde{\mho}$ и введем обозначение

$$B_{n+1} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k.$$

Тогда,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cup B_{n+1}.$$

В силу аксиомы конечной аддитивности $A3$ для $(n+1)$ попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_{n+1} \quad \left(A_kB_{n+1} = \emptyset, k = \overline{1,n}\right)$

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P((\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cup B_{n+1}) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + P(B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) + P(B_{n+1}).$$

Найдем по определению сумму числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \left[P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) - P(B_{n+1})\right] =$$

$$= P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) - \lim_{n\to\infty} P(B_{n+1}).$$

Поскольку, $B_1 = A_1 \cup B_2, B_2 = A_2 \cup B_3, \ldots, B_n = A_n \cup B_{n+1}, \ldots$, то $\{B_n\} \in \widetilde{\mho}$ является последовательностью убывающих событий

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots \quad ,$$

причем

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset.$$

Тогда, по аксиоме непрерывности $A4$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0,$$

что и доказывает справедливость $H3$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Прежде всего заметим, что аксиома конечной аддитивности $A3$ вытекает как частный случай из аксиомы счетной аддитивности $H3$.

Далее рассмотрим убывающую последовательность событий $\{A_n\} \in \widetilde{\mho}$

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \quad ,$$

которые попарно несовместны $A_i A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$ и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Воспользуемся для наглядности диаграммой Эйлера-Венна. Нарисуем семейство концентрических окружностей и в качестве события A_1 будем рассматривать попадание точки в самый большой круг, в качестве события A_2 - попадание в круг, следующий за ним, и т.д. Построим последовательность попарно несовместных событий $\{C_n\} \in \widetilde{\mho} : C_1 = A_1\bar{A}_2, C_2 = A_2\bar{A}_3, \ldots, C_n = A_n\bar{A}_{n+1}, \ldots$, где события C_n - попадание точки в концентрические кольца. Тогда,

$$A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k,$$

и по аксиоме счетной аддитивности $H3$

$$P(A_1) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(C_k\right).$$

Отсюда следует, что сумма числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(C_k\right) < \infty,$$

т.е. ряд сходится. По необходимому и достаточному признаку сходимости числовых рядов n-ый остаток ряда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} P\left(C_k\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Однако, по построению

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k.$$

Поэтому

$$P\left(A_n\right) = P(\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) = \sum_{k=n}^{\infty} P\left(C_k\right).$$

Отсюда и вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0. \qquad \boxtimes$$

Таким образом, в качестве аксиом теории вероятностей можно рассматривать как систему $A1 - A4$, так и $A1, A2, H3$. Тройка $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ называется *вероятностным пространством в широком смысле*, а тройка $\left\langle \Omega, \widetilde{\mho}, P \right\rangle$ - просто *вероятностным пространством.* В соответствии с аксиомами $A1, A2, H3$ задание вероятностного пространства - это задание счетно-аддитивной неотрицательной меры на измеримом пространстве, такой, что мера Ω равна 1. Отметим, что введенное понятие вероятности обладает всеми свойствами меры - понятия, изучаемого в "Функциональном анализе". Аксиомы теории вероятностей описывают лишь самые общие требования, предъявляемые к вероятности, но не дают рецепта ее вычисления. Построение вероятностного пространства является основным этапом в создании математической модели случайного явления.

Пример.

Пусть опыт заключается в случайном бросании точки в единичный квадрат $[0,1] \times [0,1]$. Построим вероятностное пространство задачи. Элементарный исход опыта ω состоит в выборе точки квадрата. Поэтому пространство элементарных событий Ω - это сам квадрат $[0,1] \times [0,1]$. Сигма-алгебру $\widetilde{\mho}$ образуем из квадрируемых подмножеств квадрата, а вероятность события положим равной площади соответствующего измеримого множества. При этом все аксиомы $A1, A2, H3$ будут выполнены.

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что выбор вероятностного пространства не является однозначным. Тройку $\left\langle \Omega, \widetilde{\mho}, P \right\rangle$ стараются выбрать наиболее подходящей для решения поставленной задачи (например, подбором минимальной сигма-алгебры $\widetilde{\mho}^*$ вместо $\widetilde{\mho}$).

Пусть тройка $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ образует вероятностное пространство в широком смысле. С каждой алгеброй $\Im$ связана сигма-алгебра $\widetilde{\mho} = \sigma(\Im)$, порожденная $\Im$. Возникает вопрос: достаточно ли для построения вероятностного пространства $\left\langle \Omega, \widetilde{\mho}, P \right\rangle$ задать вероятность P лишь на какой-нибудь алгебре $\Im$, порождающей $\widetilde{\mho}$? Ответ дает теорема.

Теорема Каратеодори (о продолжении меры).

Пусть $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ - вероятностное пространство в широком смысле. Тогда существует и притом единственная вероятностная мера P^*, определенная на $\widetilde{\mho} = \sigma(\Im)$ и такая, что

$$P^*(A) = P(A) \text{ для } \forall A \in \Im.$$

Без доказательства.

Следствие. Каждое вероятностное пространство в широком смысле $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ автоматически определяет вероятностное пространство $\left\langle \Omega, \widetilde{\mho}, P \right\rangle$ с $\widetilde{\mho} = \sigma(\Im)$.

10.Свойства вероятности, вытекающие из аксиом.

1.Для $\forall A \in \Im$
$$P\left(\bar{A}\right) = 1 - P\left(A\right).$$

Доказательство: запишем очевидные равенства

$$A \cup \bar{A} = \Omega, A\bar{A} = \emptyset.$$

В соответствии с аксиомами $A2$ и $A3$

$$1 = P\left(\Omega\right) = P\left(A \cup \bar{A}\right) = P\left(A\right) + P\left(\bar{A}\right). \qquad \boxtimes$$

Следствие. Вероятность невозможного события

$$P\left(\emptyset\right) = P\left(\bar{\Omega}\right) = 1 - P\left(\Omega\right) = 0.$$

2.Для $\forall A \in \Im$
$$0 \leq P\left(A\right) \leq 1.$$

Доказательство: согласно аксиоме $A1$: $P\left(A\right) \geq 0, P\left(\bar{A}\right) \geq 0$. Из второго неравенства находим:

$$1 - P\left(A\right) \geq 0 \Longrightarrow P\left(A\right) \leq 1. \qquad \boxtimes$$

3.Для $\forall A, B \in \Im$ таких, что $A \subset B$

$$P\left(A\right) \leq P\left(B\right).$$

Вероятность причины не превосходит вероятности следствия.

Доказательство: воспользуемся равенством

$$B = A \cup \bar{A}B, \text{ если } A \subset B.$$

Справедливость этого равенства видна из диаграммы Эйлера-Венна. Совершенно ясно, что A и $\bar{A}B$ - несовместные события. Тогда по аксиоме $A3$

$$P\left(B\right) = P\left(A \cup \bar{A}B\right) = P\left(A\right) + P\left(\bar{A}B\right).$$

Отсюда
$$P\left(B\right) - P\left(A\right) = P\left(\bar{A}B\right) \geq 0. \qquad \boxtimes$$

4.Для $\forall A, B \in \Im$

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(AB\right).$$

Доказательство: воспользуемся двумя равенствами (см.диаграмму Эйлера-Венна)
$$A \cup B = A \cup \left(B \backslash A\right),$$
$$B = AB \cup \left(B \backslash A\right).$$

Поскольку в правых частях равенств стоят несовместные события, то по аксиоме $A3$

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B \backslash A\right),$$

$$P(B) = P(AB) + P(B \backslash A).$$

Исключая из этих соотношений вероятность $P(B \backslash A)$, приходим к доказываемой формуле. ⊠

Следствие. Для $\forall A, B \in \Im$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

11.Условная вероятность. Независимость событий.

Начнем с примера. Рассмотрим задачу с однократным подбрасыванием симметричного кубика. Введем события: A - выпадение двух очков, B - выпадение четного числа очков. Вероятности каждого из этих событий легко рассчитать по классической схеме:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Зададим себе следующий вопрос: как изменится вероятность события A, если стало известно, что произошло событие B, т.е. выпало четное число очков ? Применим снова классическую схему. Число возможных исходов уменьшилось - их стало 3: выпадение двойки, четверки, шестерки. Поэтому искомая вероятность равна 1/3.

Перейдем к общей классической схеме. Пусть пространство Ω содержит n равновозможных элементарных событий. Рассмотрим события A и B с m и k благоприятствующими исходами соответственно. По классической схеме

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad P(B) = \frac{k}{n}.$$

Найдем вероятность события A при условии, что событие B произошло. Будем обозначать ее далее как $P(A \mid B)$. Тогда, по классической схеме ее следует определить как

$$P(A \mid B) = \frac{r}{k},$$

где r - число элементарных событий, благоприятствующих и A и B одновременно, т.е. благоприятствующих событию AB. Но тогда

$$P(A \mid B) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Перейдем теперь к общему определению.

Определение.

Пусть задано вероятностное пространство $\langle \Omega, \Im, P \rangle$ и события $A, B \in \Im$. Если $P(B) > 0$, то вероятность события A при условии, что произошло событие B, называемая *условной вероятностью*, полагается равной

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$