Билет 1

1. Определение векторной функции одной и многих переменных.

2. Инвариантное определение дивергенции векторного поля.

Задача:
Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода:

$$I = \oiint\limits_S (x^2 + y^2)\, dS \ ,$$

где S – граница тела $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

Билет 2

1. Определение предела векторной функции. Свойства пределов векторных функций.

2. Инвариантный вид формулы Гаусса-Остроградского. Физический смысл дивергенции и формулы Гаусса-Остроградского.

Задача:
Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)\ dx + (y^2 - 2xy)\, dy$$

по параболе C

$$y = x^2 \quad (-1 \leq x \leq 1) \ ,$$

пробегаемой слева направо.

Билет 3

1. Непрерывность векторной функции. Действия с непрерывными функциями.

2. Инвариантное определение ротора векторного поля.

Задача:
Вычислить интеграл

$$I = \oint \frac{(x + y)\, dx - (x - y)\, dy}{x^2 + y^2} \ ,$$

где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против часовой стрелки.

Билет 4

1. Дифференцирование векторной функции одной переменной.

2. Физический смысл ротора.

Задача:

Доказать, что если S – замкнутая простая поверхность, и $\vec{l}$ – любое постоянное направление, то

$$I = \oint S \ \cos(\vec{n} \overset{\wedge}{,} \vec{l}\,)\, dS = 0 \ .$$

Билет 5

1. Геометрический смысл производной от векторной функции.

2. Оператор Гамильтона. Действия с вектором набла.

Задача:

Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} y\, dx + z\, dy + x\, dz \ ,$$

где $\mathcal{L}$ – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Билет 6

1. Определение частной производной векторной функции многих переменных.

2. Общая теорема Гаусса-Остроградского.

Задача:

Вычислить интеграл

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\ ds \ ,$$

где C - часть винтовой линии

$$x = a\cos t\ , \quad y = a\sin t\ , \quad z = bt \quad (0 \le t \le 2\pi)\ .$$

Билет 7

1. Определение производной по направлению.

2. Потенциальное поле. Критерий потенциальности поля.

Задача:

Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{A \rightsquigarrow B} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz \ ,$$

взятый по отрезку винтовой линии

$$x = a\cos\varphi \ , \quad y = a\sin\varphi \ , \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi \ ,$$

от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, h)$.

Указание: Дополнить кривую $A \rightsquigarrow B$ прямолинейным отрезком, и применить формулу Стокса.

Билет 8

1. Криволинейный интеграл первого рода. Определение. Физический смысл.

2. Циркуляция векторного поля. Инвариантный вид формулы Стокса.

Задача:

Применяя формулу Гаусса-Остроградского, преобразовать следующий поверхностный интеграл

$$I = \oint S\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + zcos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$$

в объемный. Здесь поверхность S ограничивает конечный объем V, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к гладкой поверхности S.

Билет 9

1. Криволинейный интеграл второго рода. Определение. Физический смысл.

2. Соленоидальное поле. Критерий соленоидальности поля.

Задача:

Найти $\operatorname{rot}[f(r)\,\vec{r}]$.

Билет 10

1. Определение поверхности. Способы задания поверхности. Гладкая поверхность.
2. Лапласово поле. Основная теорема векторного анализа.

Задача:
Вычислить интеграл

$$I = \oint_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy \ ,$$

где C – эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

пробегаемый против хода часовой стрелки.

Билет 11

1. Нахождение нормали и касательной плоскости к поверхности.
2. Основной и взаимный базисы. Ковариантные и контравариантные координаты вектора.

Задача:
Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz \ ,$$

где $\mathcal{L}$ – эллипс

$$x = a\sin^2 t \ , \quad y = 2a\sin t\cos t \ , \quad z = a\cos^2 t \quad (0 \le t \le \pi) \ ,$$

пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

Билет 12

1. Вычисление направляющих косинусов нормали к поверхности.
2. Определение ортогональных криволинейных координат. Критерий ортогональности. Элемент длины. Коэффициенты Ламэ.

Задача:
Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int_C (x+y)\ ds \ ,$$

где C -контур треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $B(0,1)$.

Билет 13

1. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.

2. Дифференциальные операции теории поля в сферических координатах.

Задача:
Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода:

$$I = \iint\limits_{S} (x + y + z)\, dS \ ,$$

где S – поверхность верхней полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \quad z \geq 0 \ .$$

Билет 14

1. Определение площади гладкой поверхности.

2. Дифференциальные операции теории поля в цилиндрических координатах.

Задача:
Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

вдоль путей, не проходящих через начало координат.

Билет 15

1. Определение поверхностного интеграла первого рода.

2. Оператор Гамильтона. Действия с вектором набла.

Задача:
Найти $\operatorname{rot} \vec{c}\, f(r)$.

Билет 16

1. Односторонние и двусторонние поверхности. Сторона поверхности.

2. Физический смысл ротора.

Задача:
Показать, что поле

$$\vec{A} = \vec{i}\,yz\,(2x + y + z) + \vec{j}\,xz\,(x + 2y + z) + \vec{k}\,xy\,(x + y + 2z)$$

–потенциальное и найти потенциал этого поля.

Билет 17

1. Определение поверхностного интеграла второго рода. Его физический смысл.

2. Производная по направлению и ее связь с градиентом функции.

Задача:
Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси

$$\vec{l}\{\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma\}$$

с постоянной угловой скоростью ω. Найти ротор вектора линейной скорости $\vec{v}$ в произвольной точке пространства $M(x, y, z)$ в произвольный момент времени.

Билет 18

1. Вывод формулы Гаусса-Остроградского.

2. Лапласово поле.

Задача:
Вычислить интеграл

$$I = \int_C y\ dx + z\ dy + x\ dz\ ,$$

где C – виток винтовой линии

$$x = a\cos t\ ,\quad y = a\sin t\ ,\quad z = bt \quad (0 \le t \le 2\pi)\ ,$$

пробегаемый в направлении возрастания параметра.

Билет 19

1. Формула Стокса.

2. Поверхностный интеграл 1-го рода.

Задача:
Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C xy^2\,dy - x^2y\,dx\ ,$$

где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Билет 20

1. Скалярное поле, поверхность уровня и ее свойства.

2. Формула Гаусса-Остроградского.

Задача:
Вычислить интеграл

$$I_C = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\ ,$$

где C – простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

Билет 21

1. Предел функции от области, производная по объему.

2. Поверхностный интеграл 2-го рода. Понятие двусторонней поверхности.

Задача:
Определить силовые линии векторного поля

$$\vec{a} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,2z\ .$$

Билет 22

1. Инвариантное определение градиента скалярного поля.

2. Нормаль гладкой поверхности. Понятие стороны поверхности.

Задача: Доказать формулу:

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \oint_S \cos(\vec{r} \widehat{,} \vec{n})\, dS \ ,$$

где S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S в текущей ее точке $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \ ,$$

и $\vec{r}$ – радиус-вектор, идущий от точки наблюдения (x, y, z) к точке поверхности (ξ, η, ζ).

Билет 23

1. Свойства градиента.

2. Поверхностный интеграл 1-го рода.

Задача:
Пусть $\mathcal{L}$ – замкнутый контур, расположенный в плоскости

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0 \ ,$$

и ограничивающий площадку S. Найти

$$\oint_{\mathcal{L}} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} \ ,$$

где контур $\mathcal{L}$ пробегается в положительном направлении.

Билет 24

1. Определение векторного поля.Векторные линии. Векторная трубка.
2. Криволинейный интеграл 2-го рода.

Задача:
Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода:

$$I = \iint\limits_S |xyz|\, dS \ ,$$

где S – часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

Билет 25

1. Определение поверхностного интеграла второго рода. Его физический смысл.
2. Инвариантное определение дивергенции. Ее физический смысл.

Задача:
Найти первообразную функцию z, если:

$$dz = (x^2 + 2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy - y^2)\, dy \ .$$