ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Занятие 1. Простейшая задача вариационного исчисления. Случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
В аудитории: Эльсгольц, гл. 6, примеры в тексте § 2, № 1-10.
На дом: Задачи к главе 6, № 1-8, № 14.

Занятие 2. Вариационная задача на классе векторных функций. Функционалы со старшими производными.
В аудитории: Эльсгольц, гл. 6, примеры в тексте § 3, № 1-3, § 4, № 1-3.
На дом: Задачи к главе 6, № 9-11, № 15-20.

Занятие 3. Вариационная задача на классе функций многих переменных. Задачи на условный экстремум.
В аудитории: Эльсгольц, примеры в тексте, гл. 6, § 5, № 1-3, гл. 9, § 1, № 1-2, § 3, № 1. Задача № 1 к главе 9.
На дом: Задачи к гл. 6, № 12-13. Глава 9, § 3, № 2-3. Задачи к гл. 9, № 3-5.

МЕТОД ДАЛАМБЕРА

Занятие 4. Задачи для прямой.
В аудитории: Будак, гл. II, № 52 (1) Начертить профиль струны для указанных моментов времени, 2) Найти формулы профиля струны при $t > 0$, 3) Найти формулы, представляющие закон движения точек струны с различными абсциссами), № 54.
На дом: гл.II, № 53, 55.

Занятие 5. Задачи для полупрямой.
В аудитории: Будак, гл. II, № 59, 60 (дополнительно найти закон движения точек с различными абсциссами), 69 а).
На дом: гл.II, № 60 (Найти формулы профиля струны для различных моментов времени), 69 б).

Занятие 6. Колебания под действием удара.
В аудитории: Будак, гл. II, № 56, 61, 65.
На дом: гл.II, № 62, 63, 64.

Занятие 7. Задачи для конечного отрезка.
В аудитории: Будак, гл. II, № 83, 86, 91 а).
На дом: гл.II, № 84, 91 б), в).

Занятие 8. Зачетная контрольная работа.

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0}$$

1) $F = F(x,y)$

а) Если $F_y(x,y) = 0$ проходит через граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), то $\exists$ кривая, на которой может достигаться экстремум.

б) В противном случае решение задачи не существует.

2) $F(x,y,y') = M(x,y) + N(x,y)\cdot y'$

$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ а) см. пред. комментарий.

б) Если кривая не удовлетворяет граничным условиям, задача не имеет решения на классе непрерывных функций.

в) Если $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$, то

$F(x, y, y')$ — полный дифференц. ⇒ значение $\int F(x, y, y')\,dx$ не зависит от пути интегрирования, значит вариационная задача теряет смысл.

3) $F = F(y')$

Всевозможные прямые линии $y = C_1 x + C_2$

4) $F = F(x, y')$

$$F_{y'}(x, y') = C_1$$

5) $F = F(y, y')$

$$F - y' F_{y'} = C_1$$

может быть проинтегриро- вано явно или путем введения параметра

Метод Даламбера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

$-\infty < x < +\infty$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz$$

Однородные задачи для полупрямой

1) Жестко закр. конец, $u(0,t) \equiv 0$

функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ опр. нечетно

2) Свободный конец $\to$ $u'_x(0,t) \equiv 0$

функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ опр. четно

$\boxed{1}$ $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$

$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} = F(y, y')$

$F - y' F_{y'} = C_1$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}$

$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{(y')^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1$

$\boxed{y' = sh\,t}$ $\quad \frac{ch\,t}{y} - \frac{sh^2 t}{ch\,t}\frac{1}{y} = C_1$

$y = \frac{1}{C_1} ch\,t\,(1 - th^2 t) = \frac{1}{C_1} ch\,t \cdot \frac{1}{ch^2 t}$

$y = \frac{1}{C_1\,ch\,t}$ $\quad dy = \frac{(-1)\,sh\,t}{C_1\,ch^2 t}$

$\frac{dy}{dx} = sh\,t$ $\quad dx = \frac{dy}{sh\,t} = -\frac{sh\,t}{C_1\,ch^2 t \cdot sh\,t}$

$= -\frac{1}{C_1\,ch^2 t}$ $\quad x = \int dx = -\frac{1}{C_1}\,th\,t + C_2$

$th\,t = \frac{\sqrt{ch^2 t - 1}}{ch\,t}$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{c_1}\,\mathrm{th}\,t + c_2 = & = -\dfrac{1}{c_1}\dfrac{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}}{\mathrm{ch}\,t} + c_2 \\ y = \dfrac{1}{c_1\,\mathrm{ch}\,t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ch}\,t = \frac{1}{c_1 y}$$

$$x = -\frac{1}{c_1}\frac{\sqrt{\frac{1}{c_1^2y^2} - \frac{c_1^2y^2}{c_1^2y^2}}}{\frac{1}{c_1 y}} + c_2 = -\frac{\cancel{c_1}\cancel{y}}{\cancel{c_1}}\frac{\sqrt{1-c_1^2y^2}}{c_1\cancel{y}} + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \tilde{c}_2 = \frac{\sqrt{1-c_1^2y^2}}{c_1}$$

$$(x-c_2)^2 c_1^2 = 1 - c_1^2 y^2$$

$$(x-\tilde{c}_2)^2 + y^2 = \tilde{c}_1^2$$

(2) $v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy')\,dx$

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

$$F = y^2 + 2xyy' \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2xy' \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2xy$$

$$\cancel{2y} + 2xy' - \cancel{2y} = 0 \qquad 2xy' = 0$$

$x \neq 0$

$y = C$ Решение задачи не удовлетворяет граничным условиям.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow$ интеграл не зависит от пути интегрирования и вариационная задача лишена смысла.

③. $V[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y')\,dx$

$F = xy + y^2 - 2y^2y'$ $\qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x - 4yy' + 2y \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = -2y^2$

$\frac{d}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} = -4yy' \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'} = x + 2y = 0$

$y = -\frac{x}{2} \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Решение не удовлетворяет граничным условиям.

$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -4yy' \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$\Rightarrow$ $\int F\,dx$ зависит от пути интегрирования

Решение не существует в классе непрерывных функций.

(4) $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')\, dx$

$F = y'(1 + x^2 y')$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y'} = 1 + x^2 2y'$ $\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2x\, 2y' + 2x^2 y''$

$4xy' + 2x^2 y'' = 0$ $\quad x \neq 0$

$2y' + xy'' = 0$ $\quad y' = p$

$2p + x\frac{dp}{dx} = 0$ $\quad y'' = \frac{dp}{dx}$

$\frac{x\,dp}{dx} = -2p$ $\quad \frac{1}{p}dp = -\frac{2}{x}dx$

$\ln p = -2\ln cx = \ln(\tilde{c}x)^{-2}$

$p = cx^{-2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = cx^{-2}$

$dy = c\frac{dx}{x^2}$ $\quad \boxed{y = c_1\frac{1}{x} + c_2}$

5 $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx$

$F = y'^2 + 2yy' - 16y^2$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y' - 32y$

$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + 2y$ $\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'' + 2y'$

$\cancel{2y'} - 32y - 2y'' - \cancel{2y'} = 0$

$y'' - 16y = 0$ $\quad F - y'F_{y'} = C_1$

$y'^2 + \cancel{2yy'} - 16y^2 - y'2y' - \cancel{2y'y} = C_1$

$y'^2 + 16y^2 = \tilde{C}_1$

$dy = \pm\sqrt{C_1 - 16y^2}\,dx$

$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - 16y^2}} = \pm\int dx$ $\quad \frac{1}{4}\arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2$

$\arcsin\frac{y}{C_1} = \pm 4x + \tilde{C}_2$

$y = C_1\sin(C_2 - 4x) = -C_1\sin(4x - C_2) =$

$= \tilde{C}_1\sin(4x - C_2)$

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (x y' + y'^2)\, dx \qquad \boxed{6}$$

$$F(x, y') = y'^2 + x y' \qquad F_{y'}(x, y') = C_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + x \qquad 2\frac{dy}{dx} + x = C_1 \qquad 2dy = (C_1 - x)dx$$

$$2y + C_2 = C_1 x - \frac{x^2}{2} \qquad \underline{y = C_1 x - \frac{x^2}{4} + C_2}$$

9 $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2)\,dx$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 32y \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = -2y''$

$32y + \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0 \qquad y^{IV} - 16y = 0$

$\lambda^4 - 16 = 0 \qquad (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda^2+4) = 0$

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$

---

8 $V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)\,dx$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\sin x \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$

$\boxed{y'' - y = -\sin x}$

$y_{одн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$

$y_ч = -\frac{1}{D^2-1}\sin x = -\frac{1}{-1-1}\sin x = \frac{1}{2}\sin x$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{2}\sin x$

$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx$

7 $F(y, y') = \frac{1+y^2}{(y')^2} \Rightarrow F - y' F_{y'} = C_1 \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} = -2\frac{1+y^2}{(y')^3}$

$\frac{1+y^2}{y'^2} + 2\frac{1+y^2}{y'^2} = C_1 \qquad \Rightarrow y' = \pm C_1\sqrt{1+y^2}$

$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = C_1 dx \qquad \ln|y + \sqrt{1+y^2}| = C_1 x + C_2$

$\operatorname{Arcsh} y = C_1 x + C_2$

$y = \operatorname{sh}(C_1 x + C_2)$

$$V[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\,dx \quad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2z - 4y \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \qquad y + z'' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2y \qquad \frac{\partial F}{\partial z'} = -2z' \qquad y'' + 2y - z = 0$$

$$y^{IV} = -z^{IV} \qquad z^{IV} + 2z^{II} + z = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda^2_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1.$$

$$\lambda_{1,2} = +i \quad \lambda_{3,4} = -i$$

$$z = (C_1 + C_2 x)\sin x + (C_3 + C_4 x)\cos x$$

$$y = -z'' = (C_1 + C_2 x + 2C_4)\sin x + (-2C_2 + C_3 + C_4 x)\cos x$$

---

(10) $$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + (y''')^2)\,dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y'''} = 2y'''$$

$$\boxed{y^{VI} = x} \qquad y = \frac{x^7}{7!} + C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6$$

$\boxed{13}$ $v[u(x,y,z)] = \iiint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2u f(x,y,z) \right] dx\,dy\,dz$

$$F(x,y,z,u,p,q,r) = p^2 + q^2 + r^2 + 2u\,f(x,y,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2f(x,y,z) \quad \begin{cases} p = \frac{\partial u}{\partial x} \\ q = \frac{\partial u}{\partial y} \\ r = \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2p \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 2q \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 2r$$

$$f(x,y,z) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z)$$

$\boxed{12}$ $v[z(x,y)] = \iint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad F(x,y,z,p,q) = p^2 - q^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 2p \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -2q$$

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3}\,dx$$ $\boxed{14}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'}{x^3} \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2\frac{d}{dx}\left[y' \cdot x^{-3}\right] =$$

$$= 2\left[y'' x^{-3} + y'(-3)x^{-4}\right] = 2y''x^{-3} - 6y'x^{-4}$$

$$-y''x^{-3} + 3y'x^{-4} = 0 \qquad y''x - 3y' = 0$$

$$p = y' \quad \frac{dp}{dx} = p' = y'' \qquad p'x - 3p = 0$$

$$\frac{dp}{dx}x = 3p \qquad \int \frac{1}{p}dp = 3\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln p = \ln cx^3 \qquad p = cx^3$$

$$\frac{dy}{dx} = cx^3 \Rightarrow \quad dy = cx^3 dx$$

$$y = c_1\frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = \tilde{c}_1 x^4 + \tilde{c}_2$$

15

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x)\,dx$$

$$(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = +1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2e^x \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

$$2y + 2e^x - 2y'' = 0 \qquad y'' - y = e^x$$

$$y_r = \frac{1}{D^2-1} e^x = e^x \frac{1}{(D+1)^2 - 1} \cdot 1 =$$

$$= e^x \frac{1}{D^2 + 2D} 1 = e^x \frac{1}{D+2} \frac{1}{D} 1 =$$

$$= e^x \frac{1}{D+2} x = e^x \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}D\right] x =$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^x$$

$$1 \;\big|\; 2 + D$$

$$1 + \frac{1}{2}D \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{4}D$$

$$-\frac{1}{2}D$$

$$-\frac{1}{2}D - \frac{1}{4}D^2$$

$$\frac{1}{4}D^2$$

$$y_{общ\,одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x$$

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y\sin x)\,dx \quad \boxed{16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\sin x \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = -2y' \qquad 2y - 2\sin x + 2y'' = \qquad \boxed{y'' + y = \sin x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \;, \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y_{общодн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_r = \frac{1}{D^2+1} \sin x = \operatorname{Im} \frac{1}{D^2+1} e^{ix} = \operatorname{Im} e^{ix} \frac{1}{(D+i)^2+1} 1$$

$$(D+i)^2 + 1 = D^2 + 2iD - 1 + 1 = D(D+2i)$$

$$y_r = \operatorname{Im} e^{ix} \frac{1}{(D+2i)} \frac{1}{D} 1 =$$

$$= \operatorname{Im} e^{ix} \frac{1}{(D+2i)} x =$$

$$\begin{array}{l|l} 1 - \frac{1}{2}iD & 2i + D \\ \hline & -\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}D \\ \frac{1}{2}iD & \\ \frac{1}{2}iD + \frac{1}{4}D^2 & \\ \hline -\frac{1}{4}D^2 & \end{array}$$

$$= \operatorname{Im} e^{ix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}D - i\right) x =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} e^{ix} \left(\frac{1}{2} - ix\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\cos x + i\sin x)\left(\frac{1}{2} - ix\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\cos x \cdot \frac{1}{2} \underline{- ix\cos x} + \underline{\frac{1}{2} i \sin x} + x\sin x\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{4} \sin x$$

$$y = C_1 \cos + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

(17) $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [x^2(y')^2 + 2y^2 + 2xy]\,dx$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \frac{2}{chx}$ $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$ $y'' - y = \underbrace{\frac{1}{chx}}_{f(x)}$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

$y_{общ.одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} =$

$= e^x \frac{1}{2}(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) + e^{-x}\frac{1}{2}(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) = \frac{1}{2}\tilde{C}_1(e^x + e^{-x}) +$

$+ \frac{1}{2}\tilde{C}_2(e^x - e^{-x}) = \tilde{C}_1 chx + \tilde{C}_2 shx$

$y'_x = \underbrace{C_1'(x) chx + C_2'(x) shx}_{0} + shx\,C_1(x) + C_2(x) ch(x)$

$y''_{xx} = C_1'(x) ch(x) + C_2'(x) shx = \frac{1}{chx} = f(x)$

$\begin{cases} C_1'(x) chx + C_2'(x) shx = 0 \\ C_1'(x) shx + C_2'(x) chx = \frac{1}{chx} \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} chx & shx \\ shx & chx \end{vmatrix} = ch^2x - sh^2x = 1$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & shx \\ \frac{1}{chx} & chx \end{vmatrix} = -\frac{shx}{chx} = -thx = (1) = C_1'(x)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} chx & 0 \\ shx & \frac{1}{chx} \end{vmatrix} = 1 = (2) = C_2'(x)$

$C_2'(x) = 1 \Rightarrow C_2(x) = x + \tilde{C}_2$ $C_1'(x) = -thx \Rightarrow C_1(x) =$

$= -\int thx\,dx = -\ln chx + \tilde{C}_1$

$y = (x + C_2) shx + (-\ln chx + C_1) chx =$

$= C_1 chx + C_2 shx + x\,shx - chx \ln chx$

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[x^2(y')^2 + 2y^2 + 2xy\right]dx \quad \boxed{18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y + 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y'$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 4xy' + 2x^2 y'' \qquad 4y + 2x - 4xy' - 2x^2 y'' = 0$$

$$x^2 y''_x + 2xy'_x - 2y(x) = x \quad \longrightarrow \quad x = e^t, \; dx = e^t dt$$

$$e^{2t} y''_{xx} + 2e^t y'_x - 2y = e^t \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{e^t y''_{tt} - e^t y'_t}{e^{3t}} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}}$$

$$y''_{tt} + y'_t - 2y(t) = e^t \qquad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$$

$$y_{\text{общ.одн}} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$$

$$y_2 = \frac{1}{D^2 + D - 2} e^t = \frac{1}{D-1}\frac{1}{D+2} e^t = \frac{1}{3}\frac{1}{D-1} e^t = \frac{e^t}{3}\frac{1}{D+1-1} 1 = \frac{e^t}{3} t$$

$$\begin{cases} y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + \dfrac{e^t}{3} t \\ x(t) = e^t \end{cases}, \text{ но } t = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \tilde{C}_1 x + \frac{\tilde{C}_2}{x^2} + \frac{1}{3} x \ln|x|$$

$D^4 + 4D^3 i + 6D^2 i^2 + 4D i^3 + i^4 + 2D^2 + 4Di + 2i^2 + 1$

19

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y\sin x]\,dx$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\sin x$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = -2\cdot 2y'$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$

Ур-е Эйлера: $y^{IV} + 2y^{II} + y = \sin x$

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2_{1,2} = -1 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = +i$, $\lambda_{3,4} = -i$

$y_{общ} = (C_1 + C_2 x)\sin x + (C_3 + C_4 x)\cos x$

$y_ч = \operatorname{Im}\frac{1}{D^4+2D^2+1} e^{ix} = \operatorname{Im} e^{ix}\frac{1}{(D+i)^4 + 2(D+i)^2+1} 1$

$= \operatorname{Im} e^{ix}\frac{1}{D^2}\frac{1}{(D^2+4iD-4)} 1 =$

$= \operatorname{Im} e^{ix}\frac{1}{D^2}\left(-\frac{1}{4}\right) =$

$= \operatorname{Im} e^{ix}\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{8} x^2 \sin x$

$1 \;|\; -4 + 4iD + D^2$

$1 - iD - \frac{D^2}{4} \;|\; -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} iD$

$iD - \frac{D^2}{4}$

$iD + D^2 - \frac{1}{4} iD^3$

$-\frac{5}{4} D^2 + \frac{1}{4} iD^3$

$$y = (C_1 + C_2 x)\sin x + (C_3 + C_4 x)\cos x - \frac{1}{8} x^2 \sin x$$

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3]\,dx \quad \boxed{20}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x^3 \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y'''} = 2y'''$$

Ур-е Эйлера: $2y - 2x^3 - 2y^{VI} = 0$

$$y^{VI} - y = -x^3 \qquad (\lambda^6 - 1) = 0$$

$$(\lambda^3 - 1)(\lambda^3 + 1) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y_{общ} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{1/2 x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 e^{1/2 x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 e^{-1/2 x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6 e^{-1/2 x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$$y_ч = \frac{1}{D^6 - 1}(-x^3) = x^3$$

$$\frac{1}{1 - D^6} \quad \frac{1 - 1 + D^6}{1 - D^6} \quad \frac{1 - D^6}{D^6} \ldots$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{x/2}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x/2}\left(C_5 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$