Глава IV.
КОНЕЧНЫЕ АБСТРАКТНЫЕ АВТОМАТЫ

Абстрактным конечным автоматом называется система $\alpha = \{A, B, Q, F, G, q_0\}$, где
A – множество входных сигналов (входной алфавит),
B – множество выходных сигналов (выходной алфавит),
Q – множество внутренних состояний (алфавит состояний), причем
A, B, Q – конечные множества
F: $A \times Q \to B$ – **функция выхода**: $F(a, q) = b$, где $a \in A$, $b \in B$, $q \in Q$,
G: $A \times Q \to Q$ – **функция следующего состояния** (функция перехода): $G(a, q) = q'$,
q_0 – начальное состояние.

A^{ω} - множество всех слов бесконечной длины, составленных из букв алфавита A. Множество A* состоит из всех слов, составленных из букв алфавита A.

Способы задания графа.

1. Табличный

x(t)	z(t-1)	y(t)	z(t)
A	Q	F	G

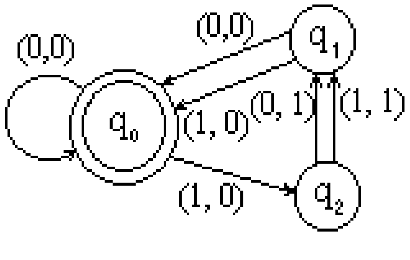
2. Аналитический (формульный): $\begin{cases} y(t) = F(x(t),\ z(t-1)), \\ z(t) = G(x(t),\ z(t-1)), \\ z(0) = q_0. \end{cases}$

3. Графический – с помощью диаграммы Мура.

Диаграмма Мура это ориентированный корневой граф,
(а) множество вершин которого совпадает с множеством Q;
(б) ребра его – (a, b), где $a \in A$, $b \in B$; причем для $\forall q \in Q$ и для $\forall a \in A$ существует только одно ребро, выходящее из вершины q, в котором первая буква – a.

Пример 5. Автомат с тремя состояниями: $A=B=E_2$, $Q = \left\{ \underbrace{q_0}_{\text{покой}},\ q_1,\ \underbrace{q_2}_{\text{возбуждение}} \right\}$.

x(t)	z(t-1)	y(t)	z(t)
0	q_0	0	q_0
1	q_0	0	q_2
0	q_1	0	q_0
1	q_1	0	q_0
0	q_2	1	q_1
1	q_2	1	q_1



Функция f: $A^\omega \to B^\omega$ называется **детерминированной** тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) Для любого $s \geq 0$, s-й символ $y(s)$ слова $\tilde{y}^\omega = f\left(\tilde{x}^\omega\right)$ - однозначная функция первых s символов $x(1), x(2), \ldots x(s)$ слова $\tilde{x}^\omega$.
2) Если начала слов $\tilde{x}_1^\omega$ и $\tilde{x}_2^\omega$ совпадают, то у слов $\tilde{y}_1^\omega = f\left(\tilde{x}_1^\omega\right)$ и $\tilde{y}_2^\omega = f\left(\tilde{x}_2^\omega\right)$ совпадают начала той же длины.

Другими словами, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ - детерминированная, если y_n зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но не зависит от последующих входных символов $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$

Детерминированная функция называется **ограниченно-детерминированной**, если число ее различных остаточных функций конечно.

Критерий автоматности функции. Функция является автоматной тогда и только тогда, когда она ограниченно детерминированная.

Пример 6: Является ли словарная функция f: $X^* \to Y^*$, где $X=Y=\{0; 1\}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = x_1, x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, \ldots$ автоматной? Если да, то постройте автомат, реализующий ее.

Решение: Данная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ является детерминированной по определению, так как любое y_i зависит от $x_1, \ldots, x_i$, но не зависит от последующих входных символов. Выясним, является ли она ограниченно-детерминированной. Для этого найдем все ее остаточные функции.

1) $f(0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \underbrace{0}_{f(0)}, \underbrace{0 \oplus x_1, 0 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots}_{f_0}$

○ $f_0(x_1, x_2, \ldots) = x_1, x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots = f(x_1, x_2, \ldots)$

$f(1, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \underbrace{1}_{f(1)}, \underbrace{1 \oplus x_1, 1 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots}_{f_1}$

□ $f_1(x_1, x_2, \ldots) = 1 \oplus x_1, 1 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots$

2) $f_1(0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \underbrace{1 \oplus 0}_{f_1(0)=1}, \underbrace{1 \oplus 0 \oplus x_1, 0 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots}_{f_{10}}$

△ $f_{10}(x_1, x_2, \ldots) = 1 \oplus x_1, x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots$

$f_1(1, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \underbrace{1 \oplus 1}_{f_1(1)=0}, \underbrace{1 \oplus 1 \oplus x_1, 1 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots}_{f_{11}}$

◇ $f_{11}(x_1, x_2, \ldots) = x_1, 1 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots$

Далее аналогично

3) ○ $f_{000}(x_1, x_2, \ldots) = x_1, x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots = f(x_1, x_2, \ldots)$

□ $f_{101}(x_1, x_2, \ldots) = 1 \oplus x_1, 1 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots = f_1(x_1, x_2, \ldots)$

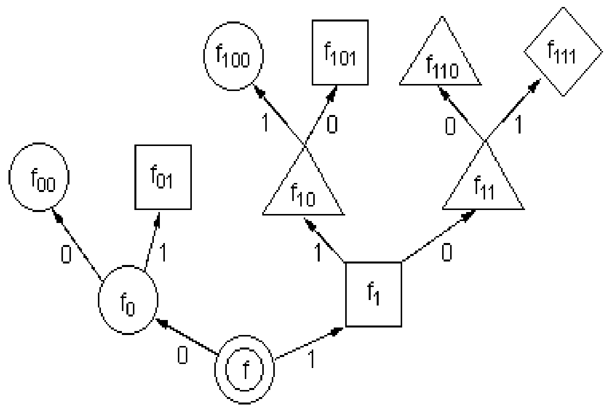
△ $f_{110}(x_1, x_2, \ldots) = 1 \oplus x_1, x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots = f_{10}(x_1, x_2, \ldots)$

◇ $f_{111}(x_1, x_2, \ldots) = x_1, 1 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots = f_{11}(x_1, x_2, \ldots)$

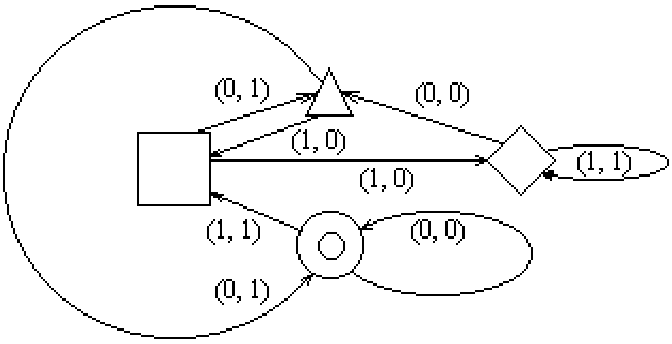
Поскольку на 3-ем шаге, рассмотрев все возможные остаточные функции, мы не получили новых остаточных функций, то исходная функция f является ограниченно-детерминированной (у нее 4 различных остаточных функции). Следовательно, функция f является автоматной по критерию автоматности.

Информационное дерево для этой функции имеет 4 различных вида вершин:

$f = f_0$ ○, f_{10} △, f_1 □, f_{11} ◇.



Теперь построим диаграмму Мура, т.е. зададим графически искомый автомат. Для этого "склеим" все одинаковые вершины.



У П Р А Ж Н Е Н И Я

50. Являются ли детерминированными следующие словарные функции $\varphi: \{0, 1\}^{\omega} \to \{0, 1\}^{\omega}$? Ответ обосновать.

а) $\varphi\big(x(1)x(2)x(3)x(4)x(5)\ldots\big) = x(1)x(2)x(1)x(2)x(3)\ldots$, т.е.

$$\varphi: \begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(2) = x(2), \\ y(t) = x(t-1)\ \&\ x(t), \quad t \ge 3. \end{cases}$$

б) s-я буква $y(s)$ в слове $\tilde{y}^{\omega} = \varphi(\tilde{x}^{\omega})$ равна 0, если существует $t \ge s$ такое, что $x(t) \le x(s)$; в противном случае $y(s) = 1$.

в) s-я буква $y(s)$ в слове $\tilde{y}^{\omega} = \varphi(\tilde{x}^{\omega})$ равна 0, если при некотором $t \le s$ выполняется неравенство $x(t) < x(t+1) + x(t+2)$; в противном случае $y(s) = 1$.

51. По заданным таблицам постройте диаграммы Мура.

а)

$x(t)$	$z(t$-1)	$y(t)$	$z(t)$
0	v_0	0	v_0
1	v_0	0	v_1
0	v_1	0	v_0
1	v_1	0	v_2
0	v_2	1	v_1
1	v_2	1	v_2

б)

$x(t)$	$z(t$-1)	$y(t)$	$z(t)$
0	v_0	0	v_0
1	v_0	0	v_1
0	v_1	1	v_1
1	v_1	1	v_2
0	v_2	1	v_2
1	v_2	0	v_0

в)

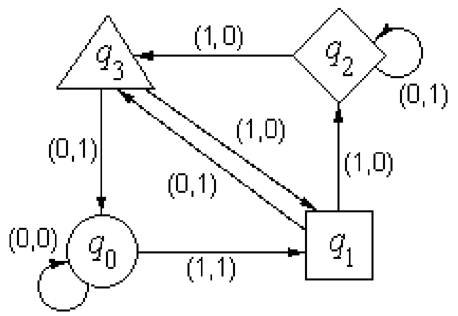
A	Q	F	G
0	q_0	0	q_1
1	q_0	0	q_2
0	q_1	1	q_0
1	q_1	1	q_3
0	q_2	1	q_1
1	q_2	1	q_3
0	q_3	0	q_0
1	q_3	0	q_2

г)

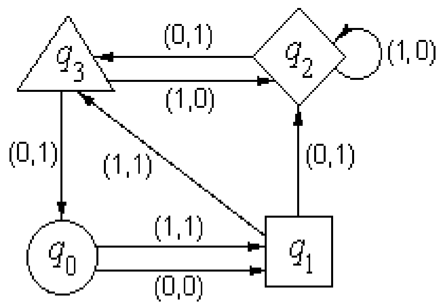
A	Q	F	G
0	q_0	0	q_1
1	q_0	0	q_1
0	q_1	1	q_2
1	q_1	0	q_3
0	q_2	1	q_0
1	q_2	1	q_3
0	q_3	0	q_1
1	q_3	1	q_3

52. Постройте таблицы по заданным диаграммам Мура.

а)



б)



53. Является ли словарная функция f: X*→Y*, где X=Y={0; 1}, автоматной? Если да, то постройте автомат, реализующий ее.

а) f: $\begin{cases} y(1) = y(2) = 1, \\ y(t) = x(t-2), \quad t \ge 3; \end{cases}$

б) f: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = x(t-1) \to x(t), \quad t \ge 2; \end{cases}$

в) f: $\begin{cases} y(2t) = \bar{x}(t+1), \quad t \ge 1, \\ y(2t-1) = \bar{x}(t); \end{cases}$

г) f: $\begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = x(t-1) \oplus x(t), \quad t \ge 2; \end{cases}$

д) f: $\begin{cases} y(1)=0, \\ y(2)=1, \\ y(t)=x(t-1)\,\&\,x(t), \quad t\ge 3; \end{cases}$ е) f: $\begin{cases} y(1)=1, \\ y(2)=x(1), \\ y(t)=x(t-1)\vee x(t), \quad t\ge 3; \end{cases}$

ж) f: $\begin{cases} y(1)=0, \\ y(2)=x(2), \\ y(t)=x(t)\sim x(t+1), \quad t\ge 3; \end{cases}$ з) f: $\begin{cases} y(1)=1, \\ y(2t-1)=\bar{x}(2t-1), \\ y(2t)=\bar{x}(2t), \quad t\ge 2. \end{cases}$

Глава V. ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ

Кодирование производится с помощью словарной функции f: $A^*\to B^*$, где А – алфавит источника, В – алфавит канала.

Σ: $\begin{cases} a_1 & \to & v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_k & \to & v_k \end{cases}$ – схема кодирования, где $a_i\in A$, $v_i\in B^*$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$.

Слово $a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}$ кодируется последовательностью $v_{i1}v_{i2}\ldots v_{in}$.

Набор $V=\{v_1, \ldots, v_k\}$ называется **кодом**, а соответствие f между А и В – **кодированием**. Каждый элемент кода называется **словом кода** или **элементарным кодом**. $|v_i|$ - длина кода, т.е. количество букв в нем.

Стоимостью кодирования схемой Σ: $\begin{cases} a_1 & \to & v_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_k & \to & v_k \end{cases}$ при заданном наборе частот $P=\{p_1, \ldots, p_k\}$ называется величина $C(\Sigma, P)=\sum\limits_{i=1}^{k} p_i|v_i|$.

Код, допускающий неоднозначное декодирование, называется **свободным** (или **разделимым**).

Прямая теорема о спектре свободного кода. Спектр любого свободного кода $V=\{v_1, \ldots, v_k\}$ удовлетворяет неравенству Макмиллана: $\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{q^{l_i}}\le 1$, где $q=|B|$ – число букв алфавита канала, $l_i=|v_i|$ – компоненты спектра кода (длины элементарных кодов).

Код называется **префиксным**, если ни одно из его слов не является началом другого слова.

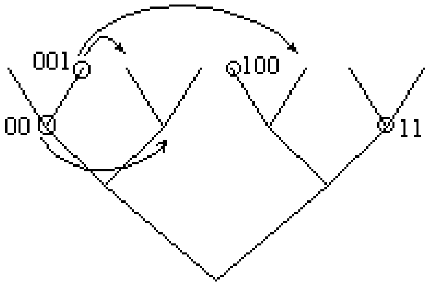
Всякий префиксный код свободен, но есть свободные коды, не являющиеся префиксными.

Графическое представление кода

Если B={0, 1}, то код можно задать деревом. Слова кода при этом будут соответствовать вершинам дерева в зависимости от маршрута движения по ребрам дерева, начиная от корня: левому ребру приписан 0, правому – 1.

Пример 7. Является ли код V_1={00, 001, 100, 11}префиксным? Если нет, постройте префиксный код с тем же набором длин кодовых слов.

Решение: Изобразим данный код графически (см. рисунок).



Вершины 00 и 001 смежные. Значит, этот код непрефиксный, но его можно преобразовать в префиксный с тем же набором длин кодовых слов, если перенести один из вышеназванных элементарных кодов в другую вершину того же яруса:

V'_1 ={00, 010, 100, 11} – префиксный код.

Код называется **оптимальным** для заданного набора частот, если он имеет наименьшую стоимость кодирования. Оптимальным всегда является префиксный код.

Свойства оптимальных кодов

1. Пусть V={v_1, …, v_k} – оптимальный префиксный код, которому соответствует набор частот $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k$. Тогда $|v_1| \leq |v_2| \leq \ldots \leq |v_k|$.

2. Пусть в оптимальном префиксном коде V наибольшую длину имеет слово α. Тогда в этом коде существует слово β, отличающееся от α лишь последней буквой.

Теорема редукции. Пусть A={a_1, …, a_k} – алфавит источника, B={0, 1} – алфавит канала, $\sum: \begin{cases} a_1 \to v_1 \\ \ldots \\ a_{k-2} \to v_{k-2} \\ a_{k-1} \to v_{k-1} = \alpha 0 \\ a_k \to v_k = \alpha 1 \end{cases}$ - схема кодирования. Коду V={v_1, …, v_k} соответствует набор частот P = (p_1, …, p_k): $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k$.

Пусть еще A'={a_1, …, a_{k-2}, b_{k-1}) – новый алфавит источника.

P'=(p_1, …, p_{k-2}, $p_{k-1}+p_k$) – новый набор частот. $\sum': \begin{cases} a_1 \to v'_1 = v_1 \\ \ldots \\ a_{k-2} \to v'_{k-2} = v_{k-2} \\ b_{k-1} \to v'_{k-1} = \alpha \end{cases}$ -

новая схема кодирования.
<u>Тогда</u> если схема Σ' – оптимальная для набора частот P', то схема Σ - оптимальная для P.

Пример 7: Постройте оптимальный код для заданного набора частот P = {0,4; 0,2; 0,12; 0,1; 0,1; 0,05; 0, 03} и алфавита источника A = {a_1, …, a_7}.

Решение: Построим оптимальный код методом Хаффмена, который основан на свойствах оптимальных кодов и теореме редукции.

<u>Прямой ход</u>. Припишем 1 и 0 тем двум буквам алфавита источника, которые используются в сообщении реже других (1 будет соответствовать самой маленькой частоте), и сложим их частоты.

a_1 0,4		a_1 0,4		a_1 0,4		a_1 0,4			a_1 0,4		a_1 0,4
a_2 0,2		a_2 0,2		a_2 0,2		a_2 0,2	0→	→	b_4 0,38	0 →	
a_3 0,12		a_3 0,12		a_3 0,12	0 →			↑			b_5 0,6
					1 →	b_3 0,22			b_3 0,22	1 →	
a_4 0,1		a_4 0,1		a_4 0,1				↑			
a_5 0,1		a_5 0,1	0 →								
a_6 0,05	0 →			b_2 0,18		b_2 0,18	1→	↑			
		b_1 0,08	1 →								
a_7 0,03	1 →										

<u>Обратный ход</u>.

a_1=1

b_3=01 → a_3=011, a_4=010

b_5=0 →

b_4=00 → a_2=000

b_2=001 → a_5=0010

b_1=0011 → a_6=00110, a_7=00111

Получили код: {1, 000, 011, 010, 0010, 00110, 00111}. Как и ожидалось по теории, он префиксный.

УПРАЖНЕНИЯ

54. Вычислите стоимость кодирования схемой ∑ при наборе частот P:

а) $\sum: \begin{cases} a \to 0, \\ b \to 01, \\ c \to 11, \\ d \to 101; \end{cases}$ P={0,4; 0,3; 0,2; 0,1};

б) Σ: $\begin{cases} a \to 0, \\ b \to 01, \\ c \to 110, \\ d \to 111; \end{cases}$ P={0,35; 0,25; 0,2; 0,2}.

55. Определите наиболее выгодную по стоимости для набора частот P={0,4; 0,25; 0,25; 0,1} схему кодирования из трёх заданных:

Σ_1: $\begin{cases} a \to 00, \\ b \to 01, \\ c \to 10, \\ d \to 11; \end{cases}$ Σ_2: $\begin{cases} a \to 0, \\ b \to 10, \\ c \to 11, \\ d \to 110; \end{cases}$ Σ_3: $\begin{cases} a \to 0, \\ b \to 10, \\ c \to 110, \\ d \to 111. \end{cases}$

56. Является ли данный код свободным? Ответ обосновать.

а) V={1, 00, 01, 10}, б) V={0, 01, 02, 12}, в) V={α, β, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, $\gamma\gamma$, $\alpha\beta\gamma$}.

57. Является ли данный код префиксным? Если нет, постройте префиксный код с тем же набором длин кодовых слов.

а) V={00, 01, 101, 110, 001}, б) V={01, 10, 100, 010, 111}.

58. Постройте оптимальный код для заданного набора частот P и алфавита источника A.

а) A={a_1, a_2, a_3, a_4}, P={0,4; 0,25; 0,25; 0,1};

б) A={a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}, P={0,3; 0,25; 0,25; 0,1; 0,1};

в) A={a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6}, P={0,36; 0,2; 0,14; 0,12; 0,1; 0,08};

г) A={a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6}, P={0,35; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,05};

д) A={a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}, P={0,25; 0,2; 0,2; 0,15; 0,13; 0,05; 0,02};

е) A={a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}, P={0,3; 0,3; 0,2; 0,06; 0,06; 0,04; 0,04}.