Глава III. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Функцией алгебры логики называется отображение f: $E_2^n \to E_2$, где $x_i \in E_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Функции алгебры логики также называются ***булевыми функциями*** (в честь английского математика Дж. Буля).

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n)$ ***существенно зависит*** от переменной x_i, если у переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ существует такой набор значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$, что выполняется неравенство: $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$. В этом случае переменную x_i называют ***существенной***. В ином случае переменная x_i - ***фиктивная***. Другими словами, переменную x_i называют ***фиктивной***, если для любого набора значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ выполняется равенство:
$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$.

Элементарные булевы функции от одной переменной

x	x	$\bar{x}$	0	1
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

$\bar{x}$ - инверсия (отрицание).

Элементарные булевы функции от двух переменных

x	y	$x\&y$	$x \vee y$	$x \sim y$	$x \oplus y$	$x \to y$	x / y	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0

$x\&y$ – конъюнкция (логическое умножение): $x\&y=1 \Leftrightarrow x=1 \wedge y=1$.

$x \vee y$ – дизъюнкция (логическое сложение): $x \vee y=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$.

$x \sim y$ – эквивалентность: $x \sim y=1 \Leftrightarrow x=y$.

$x \oplus y$ – сумма по модулю 2 ($x \oplus y = \overline{x \sim y}$): $x \oplus y=0 \Leftrightarrow x=y$.

$x \to y$ – импликация (логическое следование): $x \to y=0 \Leftrightarrow x>y$.

x/y – штрих Шеффера (антиконъюнкция): $x / y = \overline{x \& y}$.

$x \downarrow y$ – стрелка Пирса (антидизъюнкция): $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Таблицы, в которых представлены значения булевых функций, называются ***таблицами истинности***.

Пример 3. У функции $f(x, y, z) = (11011101)$ найдите фиктивные переменные и исключите их.

Решение: При данной форме записи булевой функции обычно считается, что соответствующие значения эта функция принимает на стандартном наборе значений переменных. Таблица истинности для нее выглядит следующим образом:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Сравним значения функции на таких наборах значений переменных, которые отличаются лишь одной компонентой.

$f(0,0,0) \neq f(0,1,0)$ $\Rightarrow$ переменная y – существенная;

$f(0,0,0) = f(0,0,1) = 1$ $\Rightarrow$ проверяем переменную z дальше,

$f(0,1,0) \neq f(0,1,1)$ $\Rightarrow$ переменная z – существенная;

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0,0) = f(1,0,0) = 1 \\ f(0,0,1) = f(1,0,1) = 1 \\ f(0,1,0) = f(1,1,0) = 0 \\ f(0,1,1) = f(1,1,1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{переменная } x \text{ – фиктивная.}$$

Для исключения фиктивной переменной x из функции f вычеркнем в таблице истинности столбец для x и строки, где эта переменная принимает значение 1 (в данном случае – последние 4 строки). В результате получится функция $f(y,z)$:

y	z	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Легко видеть, что $f(y,z) = z \to y$.

Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n)=\overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ называется двойственной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Таблица для двойственной функции $f^*(x, y, z)$ при упорядоченном наборе значений переменной получается из таблицы для функции $f(x,y,z)$ построением функции отрицания $\overline{f}(x,y,z)$ и переворачиванием столбца значений от функции $\overline{f}(x,y,z)$.

Если $f(x_1, \ldots, x_n)=\overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, то функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***самодвойственной***.

Разложение вида $f(x_1, \ldots, x_n)= \bigvee\limits_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} x_1^{\delta_1} \,\&\, x_2^{\delta_2} \,\&\ldots\&\, x_n^{\delta_n}$, где $f(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1$, называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (сокращенно - ***СДНФ***).

Разложение вида $f(x_1, \ldots, x_n)= \mathop{\&}\limits_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \overline{x}_1^{\delta_1} \vee \overline{x}_2^{\delta_2} \vee\ldots\vee \overline{x}_n^{\delta_n}$, где $f(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 0$, называется ***совершенной конъюнктивной нормальной формой*** (сокращенно - ***СКНФ***).

Пример 4. Для функции $f(x,y,z) = (x \,\&\, z) \vee \overline{(y \to z)}$

а) постройте таблицу истинности;

б) составьте двойственную функцию к $f(x,y,z)$;

в) найдите СДНФ и СКНФ.

Решение: а) Сначала выясним, какие значения принимают функции $x\,\&\,z$ и $\overline{y \to z}$, являющиеся "составными частями" функции *f*. Таблица истинности для $f(x,y,z)$ выглядит следующим образом:

x	y	z	$x\&z$	$\overline{y \to z}$	$f = (x\,\&\,z) \vee (\overline{y \to z})$	$\bar{f}(x,y,z)$	$f^* = \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1

б) Последний столбец данной таблицы содержит значения двойственной к $f(x,y,z)$ функции $f^*(x,y,z) = \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

в) Для составления СДНФ заметим, что функция принимает значения, равные 1, на наборах (0,1,0), (1,0,1), (1,1,0) и (1,1,1).

СДНФ $f(x,y,z) = x^0 y^1 z^0 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 \vee x^1 y^1 z^1 =$

$$= \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz\,.$$

При составлении СКНФ учтем, что $f(x,y,z)$ равна 0 на первом, втором, четвертом и пятом наборах.

СКНФ $f(x,y,z) = (\bar{x}^0 \vee \bar{y}^0 \vee \bar{z}^0)\,\&\,(\bar{x}^0 \vee \bar{y}^0 \vee \bar{z}^1)\,\&$

$$\&\,(\bar{x}^0 \vee \bar{y}^1 \vee \bar{z}^1)\,\&\,(\bar{x}^1 \vee \bar{y}^0 \vee \bar{z}^0) =$$

$$= (x \vee y \vee z)\,\&\,(x \vee y \vee \bar{z})\,\&\,(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})\,\&\,(\bar{x} \vee y \vee z)\,.$$

Полиномом Жегалкина (сокращенно - ***ПЖ***) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется сумма по модулю 2: $\underset{(j_1,\ldots,j_s)}{\oplus} a_{j_1,\ldots,j_s} x_{j_1}\ldots x_{j_s}$. Например, для функции от двух переменных ПЖ=$a_{12}x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0$.

Способы нахождения полинома Жегалкина:

1) С помощью законов алгебры логики.
   а) Из формулы. б) Из СДНФ.
2) Методом неопределенных коэффициентов.

<u>Способ 1(а)</u>: $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x}\,\&\,\bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus y \oplus x \oplus \underbrace{1 \oplus 1}_{0} = xy \oplus x \oplus y$

<u>Способ 2</u>:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$x \to y = a_{12}xy \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_0$.

$a_0 = f(0, 0) = 1$,

$a_0 \oplus a_1 = f(1, 0)$, $1 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$,

$a_2 \oplus a_0 = f(0, 1)$, $1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$,

$a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = f(1, 1)$, $a_{12} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$.

Итак, ПЖ $(x \to y) = xy \oplus x \oplus 1$.

Система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ называется ***полной*** (функционально полной), если любая булева функция может быть записана в виде формул через функции этой системы.

Замыканием M (обозначается [M]) называется множество всех булевых функций, являющихся суперпозицией функций из M. Класс (множество) M называется замкнутым (функционально замкнутым), если [M] = M.

Важнейшие замкнутые классы алгебры логики - T_0, T_1, S, M, L.

T_0 – класс булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 0: $f \in T_0$, если $f(0, \ldots, 0)=0$.

T_1 – класс булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 1: $f \in T_1$, если $f(1, \ldots, 1)=1$.

S – класс самодвойственных функций: $f \in S$, если $f(x_1, \ldots, x_n)=f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

M – класс монотонных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, т.е. таких функций, для которых при любой паре наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, находящихся в отношении предшествования (т.е. $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$), имеет место неравенство: $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$.

L – класс линейных функций, т.е. таких функций, полиномы Жегалкина для которых не содержат конъюнкций.

Лемма о несамодвойственной функции. Если булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не является самодвойственной, то из нее путем подстановки функций x и $\bar{x}$ можно получить несамодвойственную функцию от одной переменной, то есть константу.

Лемма о немонотонной функции. Если булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не является монотонной, то из нее путем подстановки констант «0» и «1» и функции x можно получить немонотонную функцию от одной переменной, т.е. $\bar{x}$.

Лемма о нелинейной функции. Если булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не является линейной, то из нее путем подстановки констант «0» и «1» функций x и $\bar{x}$, а также, быть может, путем навешивания отрицаний над функцией f, можно получить нелинейную функцию от двух переменных, то есть конъюнкцию.

Критерий полноты системы булевых функций (Теорема Поста о функциональной полноте). Система булевых функций F является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов: T_0, T_1, S, M, L.

Полная система булевых функций, которая при удалении из нее любой функции становится неполной, называется ***базисом.***

Класс A называется ***предполным***, если A – неполный, но при добавлении любой функции $f \notin A$ он становится полным.

Следствия из теоремы Поста.

1. Каждый базис в алгебре логики состоит не более чем из четырех функций.
2. В алгебре логики пять предполных классов: T_0, T_1, S, M, L.

УПРАЖНЕНИЯ

34. Функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 заданы таблицами истинности. Определите, какие переменные являются фиктивными.

x	y	f_1	f_2	f_3
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

x	y	z	f_4	f_5
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

35. Даны функции

$$f_1(x,y) = x \mathbin{\&} y,\ f_2(x,y) = x \vee y,\ f_3(x,y) = x \oplus y,\ f_4(x,y) = x \to y,$$
$$f_5(x,y) = x \sim y,\ f_6(x,y) = x / y,\ f_7(x,y) = x \downarrow y,\ f_8(x,y) = \bar{x}.$$

По заданным суперпозициям

$$f = f_2[f_8(z), f_4(y, f_3(x,z))],$$

$$g = f_7[f_1(x,z), f_5(y, f_8(z))],$$

$$h = f_3[f_8(f_4(z,x)), f_6(f_8(y),z)]$$

1) напишите формулы, реализующие функции f, g, h;

2) составьте таблицы истинности для этих функций;

3) найдите фиктивные переменные и исключите их.

36. Представьте функции $f = (x \oplus y) \mathbin{\&} (y \to z)$ и $g = (x \to z) \oplus (x \mathbin{\&} y)$ в виде суперпозиций функций f_i (i=1…8) из задачи 35. Составьте таблицы истинности для функций f и g. Есть ли у этих функций фиктивные переменные?

37. Проверьте, справедливы ли следующие соотношения:

а) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$; б) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;

в) $x \mathbin{\&} (y \sim z) = (x \mathbin{\&} y) \sim (x \mathbin{\&} z)$; г) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

38. Функции f и g заданы таблицами истинности.

x	y	z	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

1) Найдите фиктивные переменные и исключите их.

2) найдите функции f^* и g^*, двойственные к данным;

3) напишите СДНФ для функций f и g;

4) разными способами получите полиномы Жегалкина для функций f и g;

5) принадлежат ли данные функции классам T_0, T_1, S, L?

39. Постройте полиномы Жегалкина для функций:

а) $f = (x \sim z) \vee (x \,\&\, y)$; б) $g = x \sim \big((x \vee y) \,\&\, z\big)$; в) $h = \overline{(z \to x)} \oplus (\bar{y} / z)$.

40. Упростите данные СДНФ:

а) $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}$; б) $\bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee x\,y\,z$.

41. Без составления таблицы истинности получите двойственные функции к $f = (x \sim z) \vee (x \,\&\, y)$, $g = (x \oplus y) \vee (\bar{x} \,\&\, z)$ и $h = (x \downarrow z) \oplus (x \vee y)$.

42. С помощью теоремы о полноте второй системы докажите полноту следующих систем булевых функций:

а) $\{/\}$, б) $\{\neg, \to\}$, в) $\{0, 1, \&, \oplus\}$.

43. Функции заданы таблицами истинности.

x	y	z	f_1	g_1	h_1	f_2	g_2	h_2
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1

1) Является ли система данных функций $\{f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2\}$ полной?

2) Найдите все возможные базисы в этой системе.

3) Какие новые базисы образуются при добавлении к данной системе функций $x \,\&\, y$ и $\bar{x}$?

44. Из функций f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, заданных в условии задачи 43,

а) составьте соответствующие им СКНФ;

б) получите, если возможно, константу, инверсию и конъюнкцию.

45. Получите конъюнкцию $x \,\&\, z$ из функций

$f(x, y, z, t) = xyzt \oplus xyz \oplus z \oplus t \oplus 1$ и $g(x, y, z, t) = xyzt \oplus xyt \oplus z \oplus t$.

46. Найдите все возможные базисы в системе функций $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, где $f_1(x,y) = (x \to y) \oplus \bar{x}$, $f_2(x,y) = (x \oplus y)\,\&\,(x \vee y)$, $f_3(x,y) = \overline{x \to y}$, $f_4(x,y,z) = (x \oplus z) \to y$, $f_5(x,y,z) = (x / y) \to \bar{z}$.

Из функций f_4 и f_5 получите, если возможно, константу, инверсию и конъюнкцию.

47. С помощью теоремы Поста о функциональной полноте выясните, являются ли полными системы булевых функций

а) $\{x \to y,\ x \to \bar{y}\ \&\ z\}$, б) $\{0, x\&y, x\oplus y\}$, в) $\{1, x\&y, x\oplus y\}$.

48. Приведите пример базиса в алгебре логики из четырёх функций. Для обоснования ответа заполните таблицу принадлежности этих функций важнейшим замкнутым классам алгебры логики.

49. Является ли полным класс булевых функций $S \cup \{\bar{x}\}$?

Вариант контрольной работы.

Даны функции

$f_1(x,y) = x\ \&\ y$, $f_2(x,y) = x \vee y$, $f_3(x,y) = x \oplus y$, $f_4(x,y) = x \to y$,
$f_5(x,y) = x \sim y$, $f_6(x,y) = x / y$, $f_7(x,y) = x \downarrow y$, $f_8(x,y) = \bar{x}$.

По заданным суперпозициям

$$f = f_2\{f_1[f_8(f_4(x,y)), z], f_1[x, f_7(y,z)]\}$$

$$g = f_1(f_4(x,y), f_5(y,z))$$

$$h = f_7\{x, f_2[f_3(x,y), f_8(z)]\}$$

1) напишите формулы, реализующие функции *f, g, h*;

2) составьте таблицы истинности для этих функций;

3) найдите фиктивные переменные и исключите их;

4) найдите функции *f*, g*, h**, двойственные к данным;

5) напишите СДНФ для функций *f, g, h*;

6) разными способами получите полиномы Жегалкина для функций *f, g, h*;

7) являются ли данные функции сохраняющими константы 0 и 1, самодвойственными, линейными?