Глава II. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Графом G называется пара множеств V и E (G =(V, E)), где V - непустое множество, а E – некоторое множество пар элементов множества V (E = $\{(v_i, v_j)\}$, i= 1, 2, 3, …, n; j = 1, 2, 3, …, n, где n – число вершин графа). Элементы множества V называются **вершинами**, а элементы E – **ребрами** графа.

Путь называется **простым**, если все вершины графа, по которым он проходит, различны (ни по одной вершине не проходит более одного раза).

Путь называется **замкнутым**, если он начинается и заканчивается в одной и той же вершине.

Циклом называется замкнутый путь, не проходящий более одного раза по одному и тому же ребру.

Цикл называется **простым**, если он ни через одну вершину не проходит более одного раза.

Матрицей смежности конечного графа ***G*** с ***p*** вершинами называется матрица A(G) = $\|v_{ij}\|$ (i, j = 1, 2,…, p) размером $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p}$, в которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } v_i \textit{ и } v_j \textit{ смежные}, \\ 0, \textit{если } v_i \textit{ и } v_j \textit{ несмежные}. \end{cases}$$

Матрицей инцидентности графа G с ***p*** вершинами и ***q*** ребрами называется матрица I(G)=$\|b_{ij}\|$ размером $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}$ (i = 1,2, …, p; j = 1, 2, …, q), в которой $b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если вершина } v_i \textit{ инцидентна ребру } x_j, \\ 0, \textit{если вершина } v_i \textit{ неинцидентна ребру } x_j. \end{cases}$

Матрицей векторов смежности называется матрица, элементы которой непосредственно соответствуют индексам помеченных вершин данного графа. В этой матрице i-ая строка содержит вектор, компонентами которого являются все вершины, смежные с v_i. Порядок элементов в таком векторе (векторе смежности) обычно определяется порядком, в котором представлены ребра в графе. Размер этой матрицы - $p\times d$, где d – максимальная степень вершины.

Основная теорема теории графов. Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер ($\sum_{i=1}^{p} \deg V_i = 2q$).

Следствие. В любом графе число вершин с нечетными степенями четное.

Если в графе G все вершины имеют одинаковую степень, равную ***r***,, то такой граф называется **регулярным или однородным** степени ***r***. При этом пишут: deg G = r.

Граф называется **полным**, если каждые две различные его вершины соединены одним и только одним ребром.

Дополнением к графу G называется граф $\overline{G}$ с теми же вершинами, что и граф G, и с теми, и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу G, чтобы получить полный граф.

Изображение графа называется **правильным**, если линии, изображающие его ребра, не пересекаются.

Граф называется **планарным**, если его можно правильно изобразить на плоскости.

Теорема о количестве граней связанного планарного графа. Пусть G – связный планарный граф с $\boldsymbol{p}$ вершинами и $\boldsymbol{q}$ ребрами. Число граней в любом его правильном изображении на плоскости равно $r=q-p+2$.

Следствия:

1) Если связный планарный граф G имеет p вершин ($p \geq 3$) и q ребер, то $q \leq 3\cdot(p-2)$.
2) Если граф G к тому же еще и содержит цикл длины 3, то $q \leq 2\cdot(p-2)$.

Два графа G и H называются **изоморфными** (G=H), если между множествами их вершин существует взаимно-однозначное отображение, сохраняющее смежность.

Алгоритм решения задач изоморфизма:

1. Пытаются доказать, что графы не изоморфны. С этой целью составляют список различных инвариантов в порядке, определяемом сложностью их нахождения (число вершин, число ребер, спектр (набор) степеней вершин, циклы определенной длины и их количество).

2. Последовательно сравнивают значения инвариантов.

К сожалению, в общем случае неизвестен код графа, который бы позволил по этой процедуре установить изоморфность графов. В частности, даже если спектры степеней вершин двух графов совпадают, то эти графы могут быть неизоморфными. Поэтому

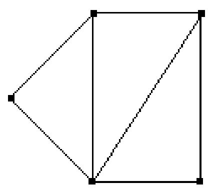
3а. если есть несовпадающие инварианты, то графы неизоморфны.

3б. при совпадении достаточно большого числа инвариантов целесообразно попробовать доказать, что графы изоморфны. Для этого достаточно привести изоморфизм.

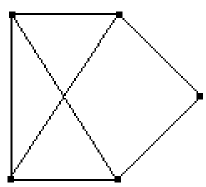
Деревом называется связный граф без циклов. В дереве с $\boldsymbol{p}$ вершинами и $\boldsymbol{q}$ ребрами $q = p - 1$.

Пример 2. Являются ли изоморфными следующие пары графов?

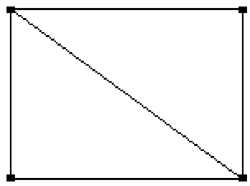
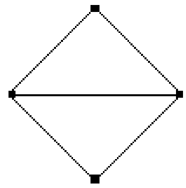
а) G_1



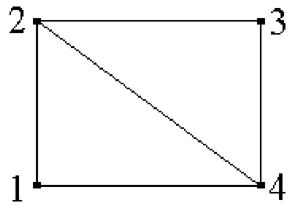
G_2



В каждом из этих графов 5 вершин и 7 ребер. Однако в графе G_1 есть вершина степени 4, в то время как в графе G_2 степень каждой вершины не больше 3. Следовательно, данные графы неизоморфны.

б) H_1  H_2 

В каждом из этих графов 4 вершины и 5 ребер, наборы степеней их вершин тоже совпадают: (2, 3, 2, 3). Кроме того, у них по 2 цикла длины 3 и по 1 циклу длины 4. Имеет смысл попытаться привести изоморфизм. Для этого пронумеруем вершины графа H_1 в произвольном порядке, а для вершин второго графа подберем номера так, чтобы сохранить смежность соответствующих вершин (рис. 3).

H_1 

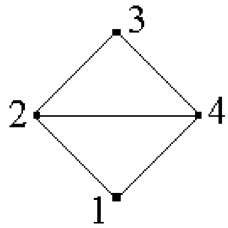
H_2 

Рис. 3

Теперь видно, что в обоих графах вершина 1 смежна со всеми, кроме вершины 3, а вершины 2 и 4 смежны со всеми вершинами без исключений. Следовательно, данные графы изоморфны по определению.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

19. Дайте классификацию маршрутов в графе, приведенном на рисунке 4.

1, 2, 3, 5, 2;
2, 3, 5, 4;
2, 3, 4, 5, 3, 2;
3, 4, 5, 3.

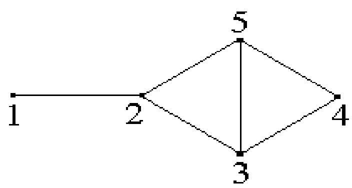


Рис. 4.

20. Дан регулярный граф с 6 вершинами и 9 ребрами.
а) Докажите, что в нем есть хотя бы 1 цикл.
б) Нарисуйте этот граф.
в) Какова длина наименьшего цикла в этом графе?
г) Сколько в этом графе циклов наименьшей длины?

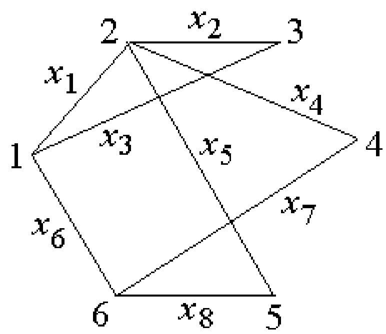
21. Даны графы G и H:

а) Составьте для каждого из них матрицы смежности, инцидентности, векторов смежности.

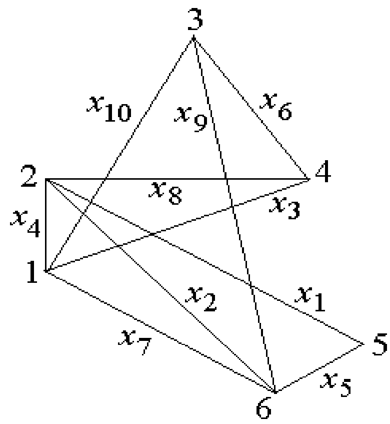
б) Из матрицы смежности для данных графов получите аналогичные матрицы для дополнений к этим графам, и по ним восстановите графы $\overline{G}$ и $\overline{H}$.

в) Являются ли графы G и H планарными?

G:



H:



г) Приведите примеры замкнутого пути, простого цикла и цикла, не являющегося простым, в графах G и H.

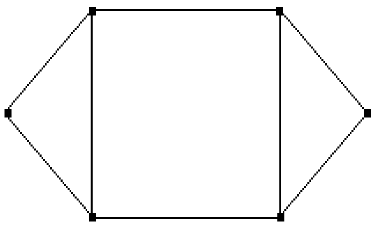
22. Существуют ли графы со следующими наборами степеней вершин:
а) (2, 3, 3, 2, 3); б) (1, 2, 3, 4) ?

23. Сколько рёбер может быть у регулярного графа с 9 вершинами?

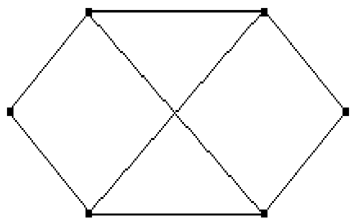
24. Докажите, что в каждом дереве есть не менее двух тупиковых вершин.

25. Изоморфны ли данные графы? Ответ обоснуйте.

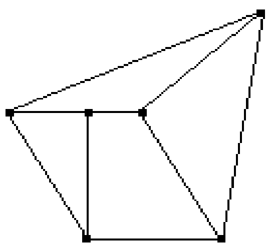
а) G_1



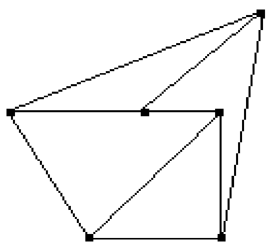
G_2



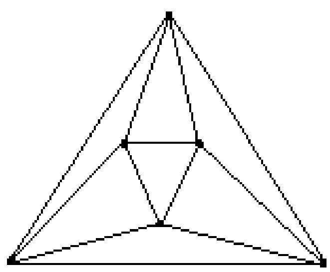
б) H_1



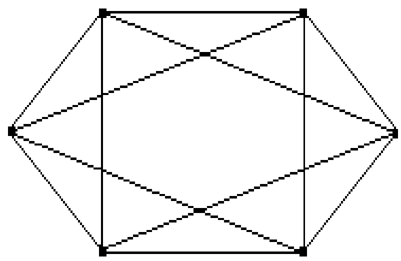
H_2



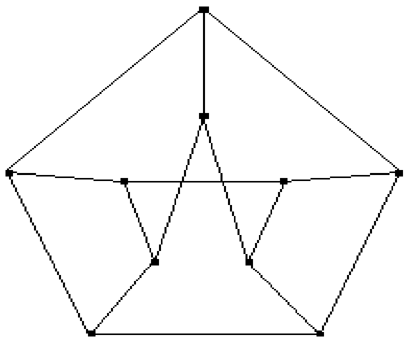
в) G_3



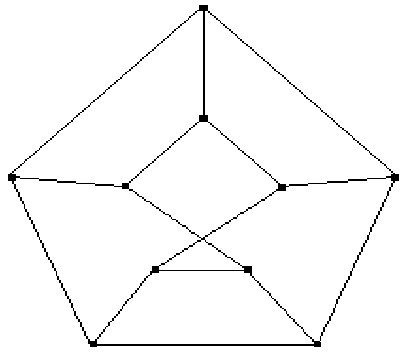
G_4



г) H_3

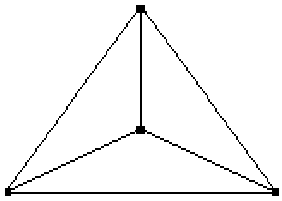


H_4

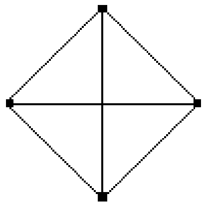


26. Исследуйте данные тройки графов на попарную изоморфность.

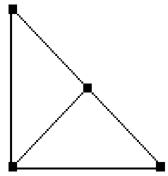
а) G_1



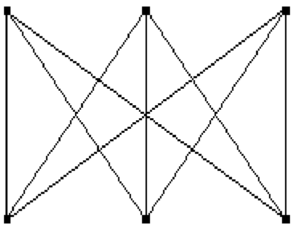
G_2



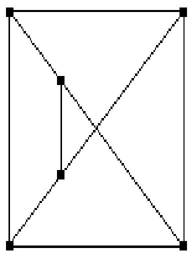
G_3



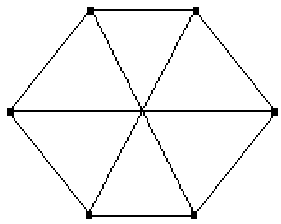
б) H_1



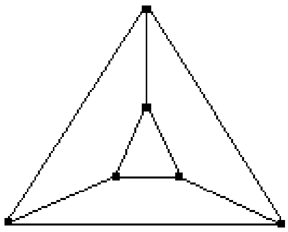
H_2



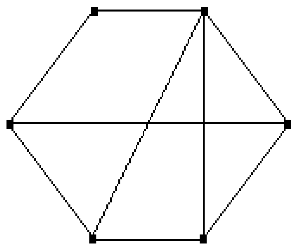
H_3



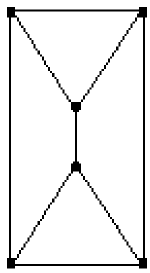
в) G_4



G_5

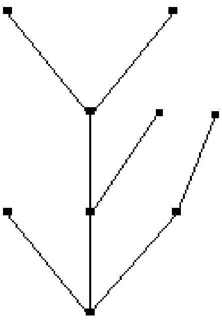


G_6

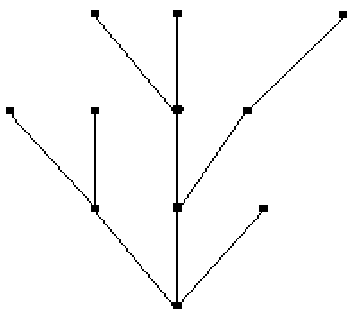


27. Составьте коды для данных деревьев:

T_1



T_2



28. Даны коды деревьев:

а) (0100011001101011); б) (0010100111000101011).

Сколько вершин имеет каждое из этих деревьев? Постройте соответствующие деревья.