Глава I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Под **множеством** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, составляющие множество, называются **элементами множества**.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A **включено** в B ($A \subseteq B$, при этом A – подмножество B).

Два множества называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов: $(A=B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \; x \in B$ и $\forall x \in B \; x \in A) \Leftrightarrow (A \subseteq B$ и $B \subseteq A)$.

Относительным дополнением множества A до множества X называется $X \setminus A = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$ (разность X - A, X без A).

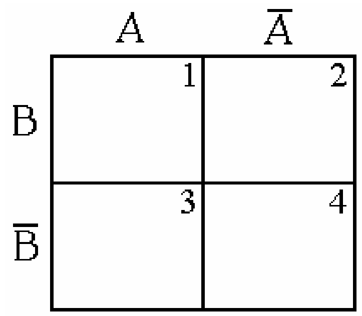
Абсолютным дополнением множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат A: $\overline{A} = U \setminus A$ – абсолютное дополнение.

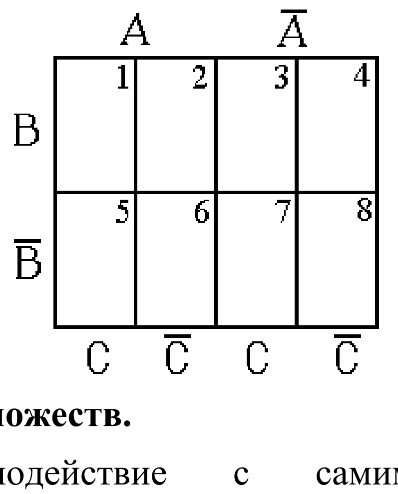
Объединением множеств ($A \cup B$) называется множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Пересечением множеств ($A \cap B$) называется множество, элементы которого принадлежат каждому из этих множеств.

Симметрической разностью множеств называется множество, элементы которого принадлежат ровно одному из этих множеств: $A \otimes B = (A \setminus B) \vee (B \setminus A)$.

Диаграммой Венна называется схематическое изображение универсального множества U в виде прямоугольника, а других множеств в виде кругов (***круги Эйлера***) или какой-то другой области.





Основные законы алгебры множеств.

1) Коммутативность
   a) $A \cup B = B \cup A$
   b) $A \cap B = B \cap A$
   c) $A \otimes B = B \otimes A$
   d) $A \setminus B \neq B \setminus A$

2) Взаимодействие с самим множеством и его дополнением
   a) $A \cap A = A$
   b) $A \cup A = A$
   c) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

d) $A \cup \overline{A} = U$

3) Свойства нуля и единицы
   a) $A \cap \varnothing = \varnothing$
   b) $A \cup \varnothing = A$
   c) $A \cap U = A$
   d) $A \cup U = U$

4) Ассоциативность
   a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   c) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
   d) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

5) Дистрибутивность
   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6) Поглощение
   a) $A \cup (A \cap B) = A$
   b) $A \cap (A \cup B) = A$

7) Дополнение к U и $\varnothing$
   a) $\overline{U} = \varnothing$
   b) $\overline{\varnothing} = U$

8) Законы де Моргана
   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

9) Двойное дополнение: $\overline{\overline{A}} = A$

10) Признаки пустого множества и универсала
    a) Если $\forall$ A, $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$
    b) Если $\forall$ A, $A \cap B = A$, то $B = U$

11) Признак дополнения:
    Если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$ (или $A = \overline{B}$).

12) Выражение для разности
    $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

P(A) **- булеан** множества A (множество всех подмножеств множества A). Его мощность равна $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Прямым (декартовым) произведением множеств X и Y ($X \times Y$) называется совокупность <u>всех</u> упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Бинарное отношение - подмножество прямого произведения двух множеств: $\rho \subseteq X \times Y$.

Пример 1. Покажите на диаграмме Венна выполнение закона дистрибутивности объединения относительно пересечения.

Решение: По условию задачи требуется продемонстрировать на диаграмме Венна справедливость равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Изобразим на диаграммах Венна по отдельности левую и правую части этого равенства. Левая часть – это объединение множеств A (прямоугольники 1,2,5,6) и $B \cap C$ (прямоугольники 1 и 3). Искомому множеству соответствует область, заштрихованная ***хотя бы один раз***, т.е. набор прямоугольников 1,2,3,5,6 (рис. 1). Правая часть – это пересечение множеств $A \cup B$ (прямоугольники 1-6) и $A \cup C$ (прямоугольники 1-3 и 5-7). Искомому множеству соответствует область, заштрихованная ***дважды***, т.е. набор прямоугольников 1,2,3,5,6 (рис. 2). Итак, каждому из множеств $A \cup (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ соответствует один и тот же набор прямоугольников. Следовательно, выполнение закона дистрибутивности объединения относительно пересечения подтверждено изображением на диаграмме Венна.

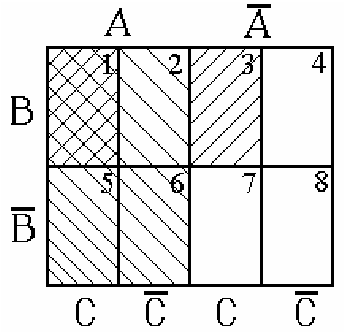


Рис. 1

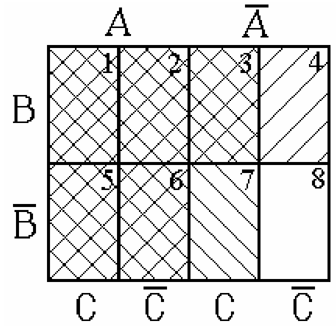


Рис. 2

Замечание. Для решения данной задачи, в принципе, не обязательно штриховать соответствующие области, а достаточно лишь выписать номера прямоугольников для множеств левой и правой частей равенства:

$A=\{1,2,5,6\}$, $B\cap C=\{1, 3\}$, $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,5,6\}$;

$A\cup B=\{1\text{-}6\}$, $A\cup C=\{1\text{-}3, 5\text{-}7\}$, $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,5,6\}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны 2 множества: $A=(1; 3)$, $B=(2; 4)$.
Составьте множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A \setminus B$, $A\otimes B$.

2. Даны конечные множества: $A=(a, b, c, h, z)$, $B=(a, c, e, f, z)$, $C=(a, d, e, h)$.
Из каких элементов состоят множества $A\setminus B$, $B\otimes C$, $(A\otimes B)\cap C$?

3. Изобразите на диаграмме Венна-Эйлера следующие множества:
а) $(A\cup B)\setminus C$; б) $(A\otimes C)\setminus B$; в) $B\cap(A\setminus C)$;
г) $C\setminus(B\otimes A)$; д) $(A\setminus C)\cap(B\otimes C)$; е) $(A\otimes B)\cap((B\cup C)\setminus A)$.

4. Даны множества *A, B, C*. При помощи операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$ запишите множество элементов, которые принадлежат:
а) всем трём указанным множествам;
б) по крайней мере, одному из этих множеств;
в) любым двум из этих множеств, но не принадлежат всем трём;
г) по крайней мере, двум из этих множеств;
д) любому одному из этих множеств, но не принадлежат двум другим.

5. Какие отношения включения справедливы для следующих пар множеств:
а) $A\setminus(B\cup C)$ и $(A\setminus B)\setminus C$; б) $A\cup(B\setminus C)$ и $(A\cup B)\setminus C$;
в) $(A\setminus B)\cup C$ и $A\cup(C\setminus B)$; г) $A\setminus(B\otimes C)$ и $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

6. Покажите на диаграмме Венна-Эйлера выполнение законов де Моргана и закона ассоциативности для симметрической разности.

7. Проверьте на диаграмме Венна, выполняются ли законы дистрибутивности объединения и пересечения относительно симметрической разности.

8. Даны множества:

$A = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$, $C = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$.

Изобразите на плоскости (x, y) множества

$(A \cup C) \setminus B$; $(A \setminus B) \cup C$; $A \setminus (B \cap C)$; $(A \otimes B) \cap C$.

9. С помощью диаграммы Венна-Эйлера упростите выражения:

а) $A \otimes (A \cap B)$; б) $A \setminus (A \setminus B)$; в) $(A \cup B) \otimes B$;

г) $A \otimes B \otimes (A \cap B)$; д) $(A \cup B) \otimes A \otimes B$; е) $(A \otimes B) \otimes (A \setminus (A \setminus B))$.

10. Замените знак * операцией алгебры множеств ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\otimes$) так, чтобы равенство было верным:

а) $B \setminus (A \cap C) = (B \setminus A) * (B \setminus C)$; б) $A * (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Ответ обоснуйте с помощью диаграммы Венна.

11. Какому множеству соответствуют прямоугольники диаграммы Венна для трёх множеств со следующими номерами:

а) 2, 3, 7; б) 6, 7; в) 4, 5 ?

Запишите это множество с помощью не более чем трёх операций алгебры множеств: $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\otimes$ (каждая операция считается столько раз, сколько встречается в этом выражении; абсолютное дополнение можно использовать сколько угодно раз). Изобразите полученный результат на диаграмме Венна.

12. Докажите утверждение: $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

13. Упростите выражения с помощью законов алгебры множеств:

а) $A \cap \overline{\overline{B} \cup C} \cup B$; б) $(A \cap B) \cup (A \otimes B)$; в) $\overline{\overline{A} \cup B} \cap \overline{A \cup B}$;

г) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$;

д) $[(A \cup (B \otimes \overline{C})) \setminus B] \cup \overline{C \setminus A}$; е) $(A \otimes \overline{B}) \cap (\overline{A \cup C})$;

ж) $(A \setminus B) \cap (A \cup B) \cap (C \setminus \overline{A})$; з) $(A \cap B) \cup (\overline{\overline{A} \cup \overline{C}}) \cup (A \setminus B)$;

и) $(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \cup (C \cap D)$.

14. Составьте множество всех подмножеств (булеан) множества A, если

а) $A = \{a, b, c\}$, б) $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, в) $A = \{a, b, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.

15. Даны 2 множества: A=$\{2; 3\}$, B=$\{5; 6\}$.

а) Составьте множества $A \times B$, $B \times A$, $2^A \times B^2$.

б) Какова мощность множества $A \times B^3 \times A^2$?
Выпишите любые 4 элемента этого множества.
в) Из каких элементов состоит заданное на множестве $A \times B$ бинарное отношение $\rho = \{\langle a, b \rangle, a \in A, b \in B \mid b \vdots a\}$?

16. Даны 2 множества: $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{4; 5; 6\}$.
а) Составьте множества $A \times B$ и $B \times A$.
б) Какова мощность множеств $B^2 \times A^3 \times B$ и $A^2 \times 2^B$?
Выпишите любые 4 элемента каждого из этих множеств.
в) Из каких элементов состоит заданное на множестве $B \times A$ бинарное отношение $\rho = \{\langle b, a \rangle, a \in A, b \in B \mid b \le 2a\}$?

17. Даны множества: A=[0; 3], B=[-1; 1].
Изобразите на плоскости (x; y) прямое произведение этих множеств $A \times B$ и $B \times A$.

18. Проверьте справедливость четырех законов дистрибутивности ($\times$ относительно $\cup$; $\times$ относительно $\cap$; $\cup$ относительно $\times$; $\cap$ относительно $\times$) на примере множеств A=[0; 1], B=[1; 2], C=[-1; 3]. Изобразите в пространстве (x; y; z) множества $(A \times B) \times C$, $C \times (A \times B)$, $(B \times C) \times A$.