Дискретная математика

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1979.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. М.: Энергоатомиздат, 1988. 2-е изд., переработанное и дополненное.
3. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1992.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб: Питер, 2001.
5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: Наука, 1977.
6. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
7. Белова Р.В. Элементы теории конечных автоматов: Учеб. пособие. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987.
8. Гилл А. Введение в теорию автоматов. - М.: Наука, 1966.
9. Алексеев В.Е., Белова Р.В. Ограниченно-детерминированные функции: Метод. разработка. Горький: ГГУ, 1983.
10. Козырев О.Р., Куркин А.А., Максимов А.Г., Митяков С.Н. Теория обработки экономической информации. - Нижний Новгород: НГТУ, 2000.

Глава I. Основы теории множеств.

1. Понятие множества

Множество является базовым понятием теории множеств, поэтому его точное определение в рамках данного курса дать невозможно. В связи с этим приходится предполагать, что определение множества интуитивно понятно.

Определение 1.1. Под ***множеством*** понимают любой набор определенных и различимых между собой объектов, мыслимый как единое целое. Объекты, составляющие множество, называются **элементами множества**. Множества обозначаются большими латинскими буквами (S), элементы множеств – маленькими (x, y).

Обозначения: Элемент принадлежит множеству: $x \in S$.
Элемент не принадлежит множеству: $y \notin S$.
Знак $\wedge$ обозначает “и”, $\vee$ - “или”.

Примеры множеств: **N** - множество натуральных чисел, **Z** - множество целых чисел, **Q** - множество рациональных чисел, **R** - множество действительных чисел, C - множество комплексных чисел.

Определение 1.2. Множество называется ***конечным***, если оно содержит конечное число элементов.

Определение 1.3. Множество, не содержащее элементов, называется ***пустым*** (обозначение - $\varnothing$).

Способы задания множеств:

1) Задание **полного списка** элементов. H = {понедельник, вторник, … воскресенье}
2) Указание некоторого **характерного свойства**. $H = \{x \mid \text{свойство}\}$ $H = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$ (иногда известны не все элементы множества).

2. Отношения между множествами.

Определение 1.4. (интуитивный принцип объемности; сформулирован Кантором). Два множества называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов.

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A\ x \in B \wedge \forall x \in B\ x \in A)$$

Пример. A – множество положительных четных чисел. B – множество натуральных чисел, состоящих из сумм двух положительных нечетных чисел.
Доказательство: 1) Пусть $x \in A \Rightarrow x=2n = (2n - 1) + 1 \Rightarrow x \in B$.
2) Пусть $x \in B \Rightarrow x=2p-1 + 2q - 1 = 2(p + q - 1) \Rightarrow x \in A$.
Следовательно, A=B по определению равных множеств.

Пример: $\{2, 4, 6\} = \{6, 2, 4\} = \{4, 4, 2, 6\}$ по определению 1.4.

Замечания 1. В принципе, можно рассматривать множества, состоящие из нескольких одинаковых элементов (например, множество книг в библиотеке, множество корней алгебраического уравнения). Однако удобней исключить такие множества из рассмотрения, что и сделаем в данном курсе. При этом в приведенных примерах можно считать, что одинаковые книги отличаются инвентарными номерами, а корни уравнения кратности большей 1 можно пронумеровать: если 3 - корень кратности 2, то в рассматриваемом множестве есть первая тройка и есть вторая тройка.

2. Элементами множества могут быть и сами множества:
{студенты на лекции} = {студенты групп 421, 422, …, 428},
$\{1, 2\} \neq \{\{1, 2\}\}$.

Отношение включения.

Определение 1.5. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A **включено** в B (*обозначение*: $A \subseteq B$, при этом A – подмножество B). Если $A \subseteq B$, но $A \neq B$, то A **строго включено** в B: $A \subset B$.

Основные свойства отношения включения:

1) $A \subseteq A$
2) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
3) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$

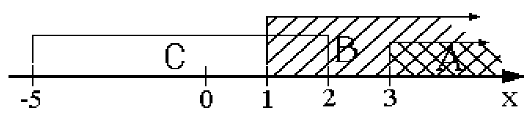
Доказательство 2-го свойства: Возьмём произвольный элемент $x \in A$. Так как $A \subseteq B$, то $x \in B$. Поскольку $B \subseteq C$, то $x \in C$. Следовательно: $A \subseteq C$ по определению включения.

Кроме того, верны утверждения: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$; $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Сравнимость множеств.

Определение 1.6. Множества A и B **сравнимые**, если $A \subseteq B \vee B \subseteq A$.

Пример. $A=\{x \mid x>3\}$, $B=\{x \mid x \geq 1\}$,
$C = \{x \mid -5 < x \leq 2\}$



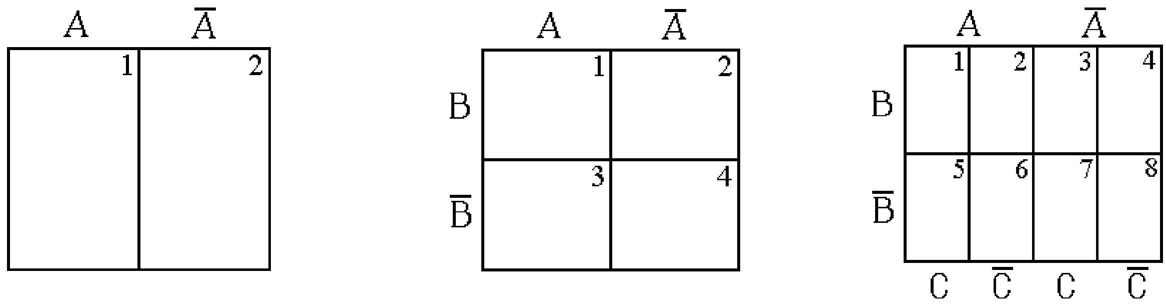
$A \subset B \Rightarrow$ A и B сравнимы, A и C не сравнимые, B и C не сравнимые.

3. Диаграммы Венна-Эйлера.

Определение 1.7. Множество U называется **универсальным** для данной задачи, если все рассматриваемые в этой задаче множества являются его подмножествами.

Определение 1.8. **Диаграммой Венна** называется схематическое изображение универсального множества U в виде прямоугольника, а других множеств в виде кругов (***круги Эйлера***) или какой-то другой области.

Диаграммы Венна с прямоугольниками для одного, двух и трех множеств соответственно приведены на рис. 1 (а, б, в).



а) б) в)

Рис. 1

Алгебраические операции над множествами.

Определение 1.9. **Относительным дополнением** множества B до множества A называется множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. Такое множество часто называют разностью A и B или “A без B” (см. круговую диаграмму Эйлера на рис. 2).

Определение 1.10. **Абсолютным дополнением** множества A называется множество $\overline{A}$ всех тех элементов, которые не принадлежат A: $\overline{A}=U \backslash A$ (см. круговую диаграмму Эйлера на рис. 3).

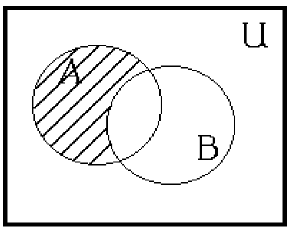


Рис. 2.

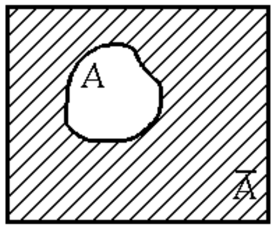


Рис.3.

Определение 1.11. **Объединением множеств** A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств: $A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Определение 1.12. **Пересечением множеств** A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат каждому из этих множеств: $A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Определение 1.13. **Симметрической разностью множеств** A и B называется множество $A \otimes B$, элементы которого принадлежат ровно одному из этих множеств: $A \otimes B=(A \backslash B) \vee (B \backslash A)$.

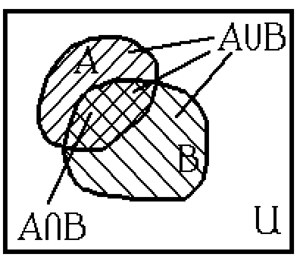


Рис. 4.

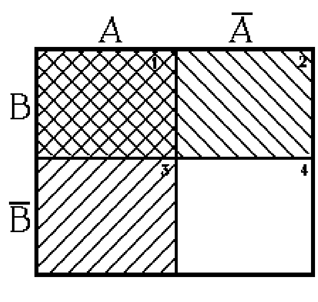


Рис. 5.

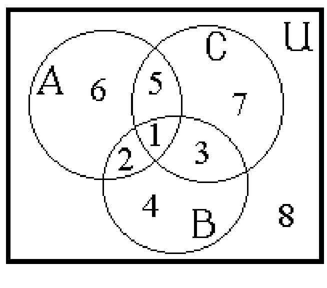


Рис. 6.

На рисунках 4 и 5 к множеству $A \cup B$ относится область, заштрихованная хотя бы 1 раз (на рис. 5 – прямоугольники 1, 2, 3); множество $A \cap B$ – область, заштрихованная дважды (прямоугольник 1); множество $A \otimes B$ - область, заштрихованная ровно 1 раз (прямоугольники 2 и 3).

Замечание. Между связными областями на диаграммах Венна (с прямоугольниками) и Эйлера (с кругами) существует взаимно-однозначное соответствие. На рисунках 1(в) и 6 эквивалентные области обозначены одинаковыми цифрами.

4. Основные законы алгебры множеств.

1) Коммутативность
   a) $A \cup B = B \cup A$
   b) $A \cap B = B \cap A$
   c) $A \otimes B = B \otimes A$
   d) $A \setminus B \neq B \setminus A$
2) Взаимодействие с самим множеством и его дополнением
   a) $A \cap A = A$
   b) $A \cup A = A$
   c) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
   d) $A \cup \overline{A} = U$
3) Свойства нуля и единицы
   a) $A \cap \varnothing = \varnothing$
   b) $A \cup \varnothing = A$
   c) $A \cap U = A$
   d) $A \cup U = U$
4) Ассоциативность
   a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   c) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
   d) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$
5) Дистрибутивность
   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6) Поглощение
   a) $A \cup (A \cap B) = A$
   b) $A \cap (A \cup B) = A$
7) Дополнение к U и $\varnothing$
   a) $\overline{U} = \varnothing$
   b) $\overline{\varnothing} = U$
8) Законы де Моргана
   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
9) Двойное дополнение: $\overline{\overline{A}} = A$
10) Признаки $\varnothing$ и U.
   a) Если $\forall$ A, $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$,
   b) Если $\forall$ A, $A \cap B = A$, то $B = U$.
11) Признак дополнения.
   Если $A \cup B=U$ и $A \cap B=\varnothing$, то $B=\overline{A}$ (или $A=\overline{B}$).
12) Выражение для разности
   $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Определение 1.14. Равенство алгебры множеств, полученное из данного заменой всех знаков $\cup$ на $\cap$, $\cap$ на $\cup$, U на $\varnothing$, $\varnothing$ на U называется **двойственным** данному.

Замечание. Все рассматриваемые законы алгебры множеств двойственны. Закон 11 – самодвойственный. Для разности двойственный закон верен в силу тождества (12).

Пример. Продемонстрируем на диаграмме Венна выполнение закона дистрибутивности объединения относительно пересечения: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Решение: Изобразим на диаграммах Венна по отдельности левую и правую части этого равенства. Левая часть – это объединение множеств A (прямоугольники 1,2,5,6) и $B \cap C$ (прямоугольники 1 и 3). Искомому множеству соответствует область, заштрихованная хотя бы один раз, т.е. набор прямоугольников 1,2,3,5,6 (рис. 7). Правая часть – это пересечение множеств $A \cup B$ (прямоугольники 1-6) и $A \cup C$ (прямоугольники 1-3 и 5-7). Искомому множеству соответствует область, заштрихованная дважды, т.е. набор прямоугольников 1,2,3,5,6 (рис. 8). Итак, каждому из множеств $A \cup (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ соответствует один и тот же набор прямоугольников. Следовательно, выполнение закона дистрибутивности объединения относительно пересечения подтверждено изображением на диаграмме Венна.

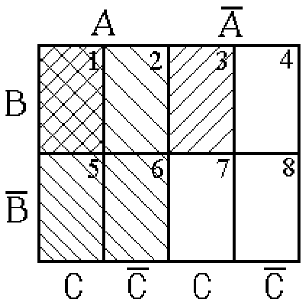


Рис. 7.

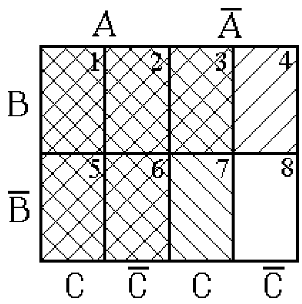


Рис. 8.

Замечание. Для решения данной задачи, в принципе, не обязательно штриховать соответствующие области, а достаточно лишь выписать номера прямоугольников для множеств левой и правой частей равенства:

$A=\{1,2,5,6\}$, $B\cap C=\{1, 3\}$, $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,5,6\}$;

$A\cup B=\{1\text{-}6\}$, $A\cup C=\{1\text{-}3, 5\text{-}7\}$, $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,5,6\}$.

Теперь приведем строгое доказательство **закона дистрибутивности объединения относительно пересечения:** $A\cup(B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$.

Доказательство:

1) Сначала докажем, что каждый элемент первого множества принадлежит и второму:

$\forall x\in(A\cup(B\cap C)) \Rightarrow (x\in A \vee x\in B\cap C)$. Рассмотрим 2 случая.

а) $x\in B\cap C \Rightarrow (x\in B) \wedge (x\in C) \Rightarrow (x\in A\cup B) \wedge (x\in A\cup C) \Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

б) $x\in A \Rightarrow (x\in A\cup B) \wedge (x\in A\cup C) \Rightarrow x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Итак, доказали, что в любом случае ((а) или (б)) каждый элемент первого множества принадлежит второму множеству.

2) Теперь докажем, что каждый элемент второго множества содержится в первом:

$\forall x\in(A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow (x \in A\cup B) \wedge (x\in A\cup C) \Rightarrow$

$\Rightarrow ((x\in A)\vee(x\in B)\wedge(x\in A)\vee(x\in C)) \Rightarrow (x\in A) \vee ((x\in B) \wedge (x\in C)) \Rightarrow$

$x\in A\cup(B\cap C)$. Доказательство в шаге 2 завершено.

Следовательно, множества $A\cup(B\cap C)$ и $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ равны по определению.

! Закон дистрибутивности пересечения относительно объединения докажите самостоятельно.

Закон де Моргана: $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Доказательство (другой закон де Моргана докажите самостоятельно):

$\forall x \in \overline{A\cup B} \Rightarrow x \notin (A\cup B) \Rightarrow (x\notin A)\wedge(x\notin B) \Rightarrow (x\in \overline{A})\wedge(x\in \overline{B}) \Rightarrow x\in(\overline{A}\cap\overline{B})$.

5. Полезные тождества:

1) $A \cup B = A \otimes B \otimes (A \cap B)$
2) $A \cup B = (A \otimes B) \otimes (A \setminus (A \setminus B))$
3) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$
4) $A \cap B = (A \cup B) \otimes A\otimes B$
5) $A \setminus B = (A \cup B) \otimes B$
6) $A \setminus B = A \otimes (A \cap B)$

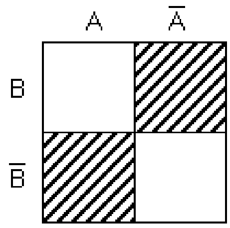
! Нельзя выразить «\» через «∩» и «∪»; «∪» - через «∩» и «\».

Важное утверждение

$$\left.\begin{cases} A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \setminus B = A\cap\overline{B} = \varnothing \Rightarrow A\subseteq B \\ B \setminus A = \varnothing \Leftrightarrow B \setminus A = B\cap\overline{A} = \varnothing \Rightarrow B\subseteq A \end{cases}\right\} \Rightarrow A = B$$

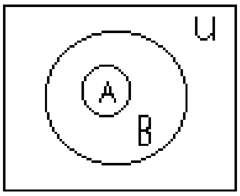
$\Uparrow\Downarrow$

$A\otimes B=\varnothing \Leftrightarrow A=B$



Замечание. Отношения включения множеств могут быть определены в терминах $\cup$ и $\cap$. Следующие утверждения о произвольных множествах A и B попарно эквивалентны:

1) $A \subseteq B$
2) $A \cap B = A$
3) $A \cup B = B$
4) $A \setminus B = \varnothing$
5) $\overline{A} \cup B = U$
6) $A \cap \overline{B} = \varnothing$



С помощью законов алгебры множеств можно упрощать выражения, содержащие множества.

Примеры:

1) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cup B = (\overline{A} \cup B) \cup B = \overline{A} \cup (B \cup B) = \overline{A} \cup B$;
2) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cup U = A$.

6. Обобщенные тождества алгебры множеств:

1) Обобщенная дистрибутивность

а) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

а) $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$ (1)

б) $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$

Доказательство утверждения (а) (методом математической индукции):

1) $n = 2$: левая часть (1) $= A \cap (B_1 \cup B_2)$

правая часть (1) $= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ $\Rightarrow$ левая часть=правая часть (по доказанному ранее закону дистрибутивности пересечения относительно объединения).

2) Допустим, формула (а) верна при каком-то произвольном натуральном $n=k$ ($k \geq 2$), т.е. допустим, что справедливо равенство: $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i)$. Докажем, что тогда оно верно и при следующем $n=k+1$, т.е. что $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (A \cap B_i)$.

Доказательство: $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \cup B_{k+1}\right) =$ [по доказанному в шаге 1] =

$= \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right)\right) \cup (A \cap B_{k+1}) =$ [по допущению] $= \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i) \cup (A \cap B_{k+1}) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (A \cap B_i)$.

Так как утверждение (а) верно при $n=2$ и из истинности его при каком-то произвольном натуральном $n=k$ ($k \geq 2$) следует его справедливость и при следующем $n=k+1$, то равенство (1) верно для всех натуральных $n \geq 2$ на основании обобщенного принципа математической индукции.

2) Обобщенный закон де Моргана

а) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

б) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

Доказательство утверждения (а) (методом математической индукции):

1) $n = 2$: левая часть = $\overline{A_1 \cup A_2}$
правая часть = $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ $\Rightarrow$ левая часть = правая часть (по доказанному ранее).

2) Допустим: $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}$, ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$) – верно. Надо доказать: $\overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}$.

Доказательство: $\overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}}$ = [по доказанному в шаге 1] =

$= \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} \cap \overline{A_{k+1}}$ = [по допущению] = $\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i} \cap \overline{A_{k+1}} = \bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}$.

Так как выполнены оба условия обобщенного принципа математической индукции, то равенство (1) верно для всех натуральных $n \geq 2$.

7. Мощность множества

(количество элементов множества)
A' = {1,2,3,4, ..., n}, B' = {5, 6, 7, 8, ..., $n + 4$}, C' = {2, 4, 6, 8, ..., $2n$}
В множествах A', B', C' n элементов, т.е. |A| = |B| = |C| = n

Определение 1.15. Между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если элементы этих множеств объединены в пары и каждый элемент попал в одну и только одну пару.

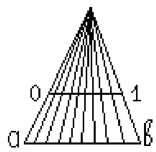
Определение 1.16. Два множества (конечных или бесконечных) имеют **одинаковую мощность**, если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Пример: A = {1,2,3,4, ..., n, ...} B = {5, 6, 7, 8, ..., $n + 4$, ...} C = {2, 4, 6, 8, ..., $2n$, ...}

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A и B} & (n, n+4) \\ \text{A и C} & (n, 2n) \\ \text{B и C} & (n+4, 2n) \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = |B| = |C|$$

Определение 1.17. Множество **бесконечно** тогда и только тогда, когда оно имеет одинаковую мощность с некоторым своим подмножеством, не совпадающим с самим этим множеством.

Примеры:
1) [0; 1] и [a; b] $\Rightarrow$ |[0; 1]| = |[a; b]|
2) |[0; 1]| = |R|
3) |(0; 1)| = |R|



Определение 1.18. Множество X называется **счетным**, если его мощность равна мощности множества натуральных чисел, т.е. |X| = |**N**|.

Пример: Натуральные и целые числа <u>равны</u> по мощности! Равенство |**N**| = |**Z**| докажем установлением следующего соответствия: $n \to \begin{cases} (1-n)/2, & n - \textit{нечетное}, \\ n/2, & n - \textit{четное}. \end{cases}$

($n \in$ **N**).

Утверждения о счетных множествах:
1) Любое подмножество счетного множества не более чем счетно.
2) Объединение счетного или конечного числа счетных множеств счетно.

Определение 1.19. Говорят, что множество X – множество **мощности континуума**, если его мощность равна мощности множества точек на отрезке [0; 1].

Определение 1.20. Мощность множества A **меньше** мощности множества B ($|A| < |B|$), если существует множество $B' \subset B$, такое что $|A| = |B'|$ и $|A| \neq |B|$.

Теорема Кантора о несчетности: Отрезок [0; 1] несчетен, т.е. $|[0; 1]| > |\mathbf{N}|$.
Без доказательства.

Следствие. Мощность множества рациональных чисел меньше множества действительных чисел, т.е. $|Q| < |R|$.

8. Подмножества

Определение 1.21. **Подмножеством** множества A называется любое множество $A_1 \subseteq A$, причем если $A_1 \neq A$, то $A_1 \subset A$.
Пример: $N \subset Z \subset Q$

Замечания:
1) Множество A имеет, по крайней мере, два подмножества (само множество A и пустое множество $\varnothing$).
2) Если $A = \varnothing$, то множество A имеет только одно подмножество.
3) Каждый элемент множества A определяет подмножество ($a \in A \Rightarrow \{a\} \subseteq A$).

Множество всех подмножеств множества A (булеан множества A)

Определение 1.22. **Булеаном** множества A называется **множеством всех его подмножеств**. Обозначение: P(A) или 2^A.

Примеры: $A = \varnothing \Rightarrow P(A) = \{\varnothing\} \Rightarrow |P(A)| = 1$,
$A = \{a_1\} \Rightarrow P(A) = \{\{a_1\}, \varnothing\} \Rightarrow |P(A)| = 2$,
$A = \{a_1, a_2\} \Rightarrow P(A) = \{\{a_1, a_2\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \varnothing\} \Rightarrow |P(A)| = 4$.

Теорема. Пусть в множестве A n элементов, т.е. $A = \{a_1, ..., a_n\}$, $n \in \mathbf{N}_0$.
Тогда $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n$ (*).
Доказательство: (методом математической индукции)
1) Пусть $A = \varnothing$, т.е. $n = 0$ (в нем n элементов) $\Rightarrow |P(A)| = 1 = 2^0 \Rightarrow$ Равенство (*) верно при $n = 0$.
2) Допустим равенство (*) истинно при каком-нибудь произвольном натуральном $n=k$, то есть, когда $A=\{a_1, \dots, a_k\}$. Тогда $|P(A)|=2^k$ ($k \in \mathbf{N}_0$). Докажем, что для множества $A'=\{a_1, ..., a_k, a_{k+1}\}$ тоже выполняется равенство (*), т.е. $|P(A')| = 2^{k+1}$.

Доказательство: $P(A') = \{\varnothing, A', \{a_1\}, \dots, \{a_k\}, \{a_{k+1}\}, \{a_1, a_2\},...\} = \{$все элементы $P(A), \{a_{k+1}\}, \{a_1, a_{k+1}\}, ..., \{a_1, a_2, a_{k+1}\}, ..., A'\} \Rightarrow |P(A')| = 2\,|P(A)| =$ [по допущению] $= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Так как выполняются оба условия обобщенного принципа математической индукции, то равенство (*) справедливо для всех $n \in \mathbf{N}_0$.

9. Прямое произведение

Определение 1.23. Упорядоченная пара $<x, y>$ определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке.

Определение 1.24. Две пары $<u, v>$ и $<w, t>$ считаются ***равными*** ($<u, v> = <w, t>$) тогда и только тогда, когда $(u = w) \wedge (v = t)$.

Определение 1.25. Элементы упорядоченной пары $<x, y>$ называются ***координатами***, то есть x – первая координата, y – вторая координата.

Определение 1.26. ***Бинарным (двуместным) отношением*** ρ называется множество упорядоченных пар, то есть множество, каждый элемент которого есть упорядоченная пара. Обобщением понятия бинарного отношения является понятие ***n*-арного (*n*-местного) отношения**, определяемого как множество кортеж длины n. В частности, при $n = 3$ - тернарное отношение.

Определение 1.27. ***Упорядоченная тройка*** $<x, y, z>$ = [по определению] = $<<x, y>, z>$ (определяется как упорядоченная пара). ***Упорядоченный набор длины n*** называется кортежем длины n и определяется как упорядоченная пара, то есть $<x_1, ..., x_n> = <<x_1, ..., x_{n-1}>, x_n>$, где $<x_1, ..., x_{n-1}>$ - кортеж длины n-1.

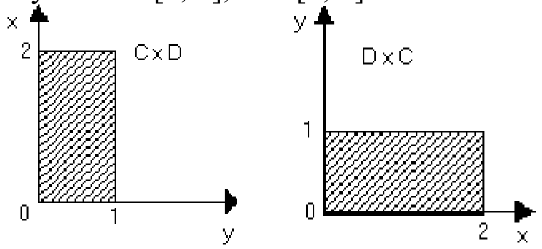
Определение 1.28. ***Прямым (декартовым) произведением множеств*** X и Y ($X \times Y$) называется совокупность <u>всех</u> упорядоченных пар $<x, y>$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Таким образом, из определений 1.26 и 1.28 следует, что *бинарное отношение* является подмножеством *прямого произведения* двух множеств: $\rho \subseteq X \times Y$.

Примеры:

1) Пусть A = {2, 3}, B = {4, 6} – дискретные множества.
$A \times B = \{<2, 4>, <2, 6>, <3, 4>, <3, 6>\}$
$B \times A = \{<4, 2>, <4, 3>, <6, 2>, <6, 3>\}$
$\rho = \{<a, b>, a \in A, b \in B \mid b = 2a\} = \{<2, 4>, <3, 6>\} \subset A \times B$.

2) Пусть C = [0, 1], D = [0, 2] – бесконечные множества.



Свойства прямого произведения

I. Прямое произведение не коммутативно и не ассоциативно.

1) Не коммутативно: $A \times B \neq B \times A$ (см. предыдущий пример).
2) Не ассоциативно: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

Последнее эквивалентно утверждению $<<a, b>, c> \neq <a,<b, c>>$. Действительно, соответствующие координаты данных упорядоченных пар не равны между собой: $<a, b> \neq a$, $c \neq <b, c>$. Значит, по определению $<<a, b>, c> \neq <a,<b, c>>$.

II. Дистрибутивность прямого произведения относительно объединения и пересечения:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ или $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ или $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Лемма о мощности прямого произведения двух множеств.

Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, ..., b_k\}$. Тогда $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство: $A \times B = \{<a_i, b_j>\}$, где $a_i \in A$ $\forall i = 1,2,3,..., n$ и $b_i \in B$ $\forall j = 1,2,3,...,k$.

$A \times B$ можно представить в виде матрицы, элементы которой – упорядоченные пары $<a_i, b_j>$:

$$\begin{matrix} <a_1, b_1> & \dots & <a_1, b_k> \\ \dots & \dots & \dots \\ <a_n, b_1> & \dots & <a_n, b_k> \end{matrix}$$

Значит $|A \times B| = nk = |A| \cdot |B|$.

Теорема о мощности прямого произведения n множеств.

$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$, $n \in \mathbf{N}$ (1).

Доказательство (методом математической индукции):

1) $n = 2 \Rightarrow |A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$ - верно по лемме.

2) Допустим, (1) истинно при $n=k$, т.е. $|A_1 \times ... \times A_k| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_k|$.

Надо доказать: $|A_1 \times ... \times A_k \times A_{k+1}| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_k| \cdot |A_{k+1}|$

Доказательство: $|A_1 \times ... \times A_k \times A_{k+1}|$ = [по лемме] = $|A_1 \times ... \times A_k| \cdot |A_{k+1}|$ = [по допущению] = $|A_1| \cdot ... \cdot |A_k| \cdot |A_{k+1}|$.

Так как выполнены оба условия обобщенного принципа математической индукции, то равенство (1) верно при всех $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Следствие. Мощность прямого произведения n одинаковых множеств:

$$|A \times ... \times A| = |A|^n$$

(n множеств A)

Пример: $A = \{0, 1\} = E_2$, $|E_2| = 2$. $E_2 \times E_2 = \{<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <1, 1>\}$

$$|E_2 \times ... \times E_2| = |E_2|^n = 2^n.$$

(n раз)