Лекция 5. Нормированные пространства: Линейное пространство X- нормированно, если определено число $\|x\|$- называемое нормой и удовлетворяющее условиям

1)$\|x\| \leq 0, \forall x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \forall \lambda \in R$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

Опр Нормой оператора A, согласованной с нормой элемента $x \in X$ пространства в котором действует оператор, называется число

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

Проверим аксиомы нормы 3) аксиома тр-ка $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\|A + B\| = \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$

Имеет место свойства

$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$

$\|A^k x\| = \|\underbrace{A \cdots A}_{k} x\| \leq \|A\|^k \|x\| \rightarrow \|A^k\| \leq \|A\|^k$

Примеры нахождения норм операторов

1. $X = C_{[a,b]} : Ax = tx, \|x\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| : A : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$

а)$\|Ax\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |tx(t)| \leq b \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| = b\|x\| \leq \{\|x\| \leq 1\} = b$

б) $\forall x^0 x^0 = 1 \rightarrow \|Ax^0\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |t| = b;$

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax^0\| = b$

Из неравенств а) и б) заключаем, что $\|A\| = b$

2. $A : R_n \rightarrow R_n, A = \{a_{il}, i, j = \overline{1, n}\} \|A\| =?$

2.1. $\|A\|_k$ -т.е. норма, согласованная с кубической нормой вектора $\|x\|_k = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

а) $\|Ax\|_k = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j| \leq$

$\max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max\limits_i |x_i| =$

$\max\limits_{1 \leq i \leq n} |\sum_{j=1}^n |a_{ij}| |\|x\|_k \leq \{$

$\forall \|x\|_k = 1\| \leq 1\} \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Пусть $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ достигается при $i = i_0$

Обозначим вектор $x^0 = \{sign(a_{i_0 j}\}_{j=1}^n$ с $\|x^0\| = 1$

$\|A\|_k = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax^0\|_k = \max\limits_i |\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Из этого и предыдущего неравенств следует, что $\|A\|_k = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ и совпадает с кубической постоянной сжатия матрицы

2. Октаэдрическая норма матрицы -

$\|A\|_o = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

3. Сферическая норма матрицы -

$\|A\|_c = \sqrt{\max_i |\lambda_i(AA^*)|}$

Опр. Оператор A^* назовем сопряженным к оператору A, если $\forall x, y \in R_n, (Ax, y) = (x, A^* y)$

Опр. Если $A = A^*$ то оператор А называют самосопряженным.

Опр. Оператор $A^* A$ - называют сингулярным по отношению к оператору A, а его собственные числа сингулярными собственными числами оператора A

Оператор $A^* A \geq 0$ и является симметрическим или самосопряженным Действительно, например

$0 \leq (Ax, Ax) = (x, A^* Ax) \rightarrow A^* A \geq 0$

следовательно, оператор $A^* A$- имеет действительные собственные числа

$\|A\|_c = \sup_{\|x\|_c \neq 0} \frac{\|Ax\|_c}{\|x\|_c} = \sup_{\|x\|_c \neq 0} \sqrt{\frac{(Ax, Ax)}{(x, x)}} = \sqrt{\sup_{\|x\|_c \neq 0} \frac{(A^* Ax, x)}{(x, x)}} = \sqrt{\max_i |\lambda_i(AA^*)|}$

Пусть λ_i, e_i- собственные числа и собственные вектора оператора B

$x=\sum_i x_ie_i, (Bx,x)=(B\sum_i x_ie_i, \sum_i x_ie_i)=$
$(\sum_i \lambda_i x_ie_i, \sum_i x_ie_i)=\sum_i \lambda_i x_i^2 \leq \max_i|\lambda_i|\sum_i x_i^2=\max_i|\lambda_i|(x,x)$
Аналогично $(Bx,x)\geq \min_i|\lambda_i|(x,x)\to \sup_{x,|x\|\neq 0}\frac{(Bx,x)}{(x,x)}=\sqrt{\max_i|\lambda_i|}\ ||A^{-1}||=\frac{1}{\sqrt{min_i|\lambda_i|}}$

Следствие. Если A - симметрический, то $\lambda(A^*A)=\lambda(A^2)=\lambda^2(A)\to\|A\|_c=\max_i|\lambda_i(A)|$,$\|A^{-1}\|=(\min_i\|\lambda_i(A)|)^{-1}$

Теорема о достаточных условиях сходимости метода простой итерации

$Ax=f\to x=Tx+\phi, \{x^{k+1}\}_{k=0}^{\infty}=\{x^{k+1}=Tx^k+\phi\}\to_{x\to\infty} x^*=Tx^*+\phi$ если $\|T\|<1$ Пусть x^* т.р. $x^*\equiv= Tx^*+\phi$ тогда

$\|x^*\|=\|Tx^*+\phi\|\leq\|Tx^*\|+\|\phi\|\leq\|T\|\|x^*\|+\|\phi\|$

откуда, следует, что

$\|x^*\|\leq\frac{\|\phi\|}{1-\|T\|}$, если $\phi=0$, то и $x^*=0$ и следовательно однородное уравнение $x=Tx$ ($\|T\|<1$ имеет единственное решение а следовательно и неоднородное уравнение имеет единственное решение

Пусть $r^k=x^k-x^*$

$x^k=Tx^{k-1}+\phi$

$x^*=Tx^*+\phi$ Вычитая из первого второе, будем иметь $x^k-x^*=T(x^{k-1}-x^*)\to\|r^k\|\leq\|Tr^{k-1}\|\leq\|T\|\|r^{k-1}\|\leq\cdots\leq\|T\|^k\|r^0\|$и т.к.$\|T\|<1\to\|r^k\|\to 0$

Практическое правило оценки погрешности для решения систем $x=Tx+\phi$ итерационными методами

Если $\|x^k-x^{k-1}\|\leq\epsilon\frac{1-\|T\|}{\|T\|}$ то $\|x^k-x^*\|\leq\epsilon$

Док-во:

$x^*=Tx^*+\phi$

$x^k=Tx^{k-1}+\phi$

Вычитая из первого равенства второе имеем $x^*-x^k=T(x^*-x^{k-1})\to x^*-x^{k-1}+x^{k-1}-x^k=T(x^*-x^{k-1})\to$

$\|x^*-x^{k-1}\|\leq\|x^k-x^{k-1}+T(x^{k-1}-x^*)\|\leq\|x^k-x^{k-1}\|+\|T\|\|x^{k-1}-x^*\|\to\|x^*-x^{k-1}\|\leq\frac{\|x^*-x^{k-1}\|}{1-\|T\|}$

С другой стороны $x^k-x^*=T(x^k-x^*)\to\|x^k-x^*\|\leq\|T\|\|x^{k-1}-x^*\|\leq\|T\|\frac{\|x^k-x^{k-1}\|}{1-\|T\|}\leq\epsilon\to$ практическое правило

Погрешности в решении линейных систем при приближенном задании матрицы А и правой части

1. Приближенное задание правой части

(1) $Ax=f$ x - решение

(2) $Ax^*=f+\delta f$, x^*- решение $x^*=x+\delta x\to A(x+\delta x)=f+\delta f$

Вычитая из (2)-(1), будем иметь

$A\delta x=\delta f\to\delta x=A^{-1}\delta f\to$

$\|\delta x\|\leq\|A^{-1}\|\|\delta f\|$

с другой стороны $f=Ax\to\|f\|\leq\|A\|\|x\|$

перемножая два последних неравенства, будем иметь

$\|\delta x\|\|f\|\leq\|A^{-1}\|\|A\|\|\delta f\|\|x\|\to$

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$

Опр. Число $\|A^{-1}\|\|A\|$ называют числом обусловленности матрицы A и обозначают через $cond(A)$

2. Приближенное задание матрицы A

(1) $Ax=f$ x-решение

(2) $(A+\delta A)x^*=f$, x^*- решение $x^*=x+\delta x\to(A+\delta A)(x+\delta x)=f$

Из (1) $\to x=A^{-1}f$

Из (2)$\to x+\delta x=(A+\delta A)^{-1}f$

Вычитая из второго первое равенство, имеем

$\delta x=[(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}]f$

Для матриц имеет место тождество

$C^{-1}-B^{-1}=B^{-1}(B-C)C^{-1}$

Тогда для δx имеем

$\delta x = -A^{-1}\delta A(A+\delta A)^{-1} f = -A^{-1}\delta A(x+\delta x) \rightarrow$
$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x+\delta x\| = \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\|x+\delta x\|$
$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

Здесь $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ -мера относительной неопределенности в задании коэффициентов системы, число $cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ -ограничивает сверху неопределенность в решении системы

Свойства числа $cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$

1) $cond(A) \rightarrow 1$ т.к. $A^{-1}A = E \rightarrow \|E\| = 1 \leq \|A^{-1}\|\|A\|$

2) Чем больше число обусловленности, тем больше погрешность в решении линейных систем при неопределенном задании коэффициентов матриц и правых частей иными словами число обусловленности характеризует качество системы по отношению к различным ошибкам.

3) Для вырожденных матриц $cond(A) = \infty$ Иногда величину $\frac{1}{cond(A)}$- рассматривают как расстояние от данной матрицы до множества вырожденных матриц

4) Вычислять число обусловленности удобно в сферической норме

$cond_c(A) = \sqrt{\frac{\max_i |\lambda_i(A^*A)|}{\min_i |\lambda_i(A^*A)|}}$ Для симметрических (самосопряженных) матриц $cond_c(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$

Пример 1: диагональная матрица $D = \{d_{ii} = 0.1, i = \overline{1,n}\}$

$cond(D) = \frac{\max_i |d_{ii}|}{\min_i |d_{ii}|} = 1$

$det(D) = (0.1)^n$ маленькое число для больших n. Пример показывает, что величина детерминанта к обусловленности матриц не имеет ни какого отношения.

Пример 2:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \cdots - x_n &= -1 \\ x_2 - x_3 \cdots - x_n &= -1 \\ &\cdots \\ x_{n-1} - x_n &= -1 \\ x_n &= 1 \end{aligned}$$

Точное решение этой системы линейных уравнений $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots 0, 1)$ нетрудно получить метом исключения, начиная с последнего уравнения

Допустим, что при в n- компоненте правой части или, что то же самое при вычислении x_n допущена ошибка $\epsilon = 10^{-15}$!!, достаточно маленькая, т.е. $x_n - 1 + \epsilon$. Иными словами, мы решаем систему

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 - \overline{x}_2 - \overline{x}_3 \cdots - \overline{x}_n &= -1 \\ \overline{x}_2 - \overline{x}_3 \cdots - \overline{x}_n &= -1 \\ &\cdots \\ \overline{x}_{n-1} - \overline{x}_n &= -1 \\ \overline{x}_n &= 1+\epsilon \end{aligned}$$

Вопрос, как различаются решения этих двух систем. Заметим, что исходя из жизненного опыта, мы ожидаем небольшое различие.

Итак $|x - \overline{x}| =?$

Введем обозначения $\overline{x} = x + \delta$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) =?$.

Для нахождения δ составим систему, полученную вычитанием первой из второй

$$\begin{aligned} \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \cdots - \delta_n &= 0 \\ \delta_2 - \delta_3 \cdots - \delta_n &= 0 \\ &\cdots \\ \delta_{n-1} - x\delta_n &= 0 \\ \delta_n &= \epsilon \end{aligned}$$

Решая ее методом исключения, начиная с последнего получаем $\delta_n = \epsilon$,$\delta_{n-1} = \delta_n = \epsilon$,$\delta_{n-2} = \delta_{n-1} + \delta_n = 2\epsilon$ и т.д. $\delta_1 = 2^{n-2}\epsilon$.

Если $\epsilon = 10^{-15}$, n=102, $\Longrightarrow \delta_1 = 2^{100}10^{-15} \simeq 10^{30}10^{-15} = 10^{15}$!!!!

Оценим число обусловленности матрицы заданной системы

$cond(A) \geq \frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta f\|/\|f\|}$

$\|\delta f = \| = \epsilon, \|f\| = 1, \|\delta x\| = 2^{n-2}, \|x\| = 1 \rightarrow cond(A) \geq \frac{2^{n-2}\epsilon}{\epsilon} = 2^{n-2}$

Достаточные условия хорошей обусловленности матриц

$Ax = f \rightarrow x = (E - A)x + f$

Пусть $\|E-A\| < 1$ тогда матрица A -хорошо обусловлена т.е. ее число обусловленности достаточно мало

$x = A^{-1}f \rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\|\|f\|$ из определения нормы следует, что существует $f \neq 0$ такое, что неравенство обращается в строгое равенство

$\|x\| \leq \|E - A\|\|x\| + \|f\| \rightarrow \|x\| \leq \frac{\|f\|}{1-\|E-A\|}$ -которое обращается в строгое равенство только при $f = 0$ Таким образом из последних двух неравенств следует, что

$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|f\|}{1-\|E-A\|}$

$\|A\| = \|E - (E - A)\| \leq 1 + \|E - A\|$ тогда

$cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \leq \frac{1+\|E-A\|}{1-\|E-A\|}$