Лекция 4. Метод Зейделя (пример неявного стационарного метода)

Систему $Ax = f$ в координатной форме

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = f_i, i = \overline{1,n}$$

перепишем в форме

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)$$

$i = \overline{1,n}$ и построим следующие итерационные процессы а)

$$x_1^{k+1} = \tfrac{1}{a_{11}}(f_1 - \textstyle\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j^k)$$

$$x_i^{k+1} = \tfrac{1}{a_{ii}}(f_i - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k)$$

$i = \overline{2,n}, k = 0, 1, 2, \cdots$

б)

$$x_n^{k+1} = \tfrac{1}{a_{nn}}(f_1 - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j^k)$$

$$x_i^{k+1} = \tfrac{1}{a_{ii}}(f_i - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k+1})$$

$i = n-1, n-2, \cdots, 1, k = 0, 1, 2, \cdots$

Место метода Зейделя среди множества всех итерационных методов

$$B_k\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f, k = 0, 1, \cdots, x^0 \in R_n$$

Матрицу $A = A^- + A^+ + D$ $D = \{d_{ii} = a_{ii}, d_{ij} = 0, i \neq j, i, j = \overline{1,n}\}$-диагональная, $A^- = \{a_{ij}^- = 0, j \geq i, a_{ij}^- = a_{ij}, i, j = \overline{1,n}\}$ -поддиагональная $A^+ = \{a_{ij}^+ = 0, j \leq i, a_{ij}^- = a_{ij}, i, j = \overline{1,n}\}$ -наддиагональная

и т.к. $(Dx)_i = a_{ii}x_i$, $(A^-x)_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j$, $(A^+x)_i = \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j$, то схему а) запишем в виде

$$Dx^{k+1} + A^-x^{k+1} + A^+x^k = f| \pm (A^- + D)x^k$$

будем иметь

$$(D + A^+)(x^{k+1} - x^k) + Ax^k = f, \tau_k = 1, B_k = (D + A^+)$$

т.е. метод Зейделя стационарный неявный метод, с матрицей B_k- треугольного вида

Достаточные условия сходимости метода Зейделя Пусть

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| < 1, i = \overline{1,n}$$

тогда метод Зейделя сходится Док-во сводится к доказательству

$$\alpha(E - (D + A^+)^{-1}A) < 1??$$

Пусть x^*- точное решение $Ax = f$ $\rho_k(x^{k+1}, x^*) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i^{k+1} - x_i^k|\{x_i^{k=1}$из схемы а$), x^k$ и из$Ax^* = f\} =$

$\max_{1\leq i\leq n}|\frac{1}{a_{ii}}(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k) -$

$\frac{1}{a_{ii}}(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^* - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^*)|$

$\max_{1\leq i\leq n}|\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}(x_j^* - x^{k+1}) + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}(x_j^* - x^k)|$

$$\underbrace{\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{i-1}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|}_{=\alpha}\max_j|x_j^*-x_j^{k+1}|+$$

$$\underbrace{\max_{1\le i\le n}\sum_{j=i+1}^{n}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|}_{=\beta}\max_j|(x_j^*-x^k|=$$

$$\alpha\rho(x^{k+1},x^*)+\beta\rho(x^k,x^*)\to$$

$$\rho(x^{k+1},x^*)\le\frac{\beta}{1-\alpha}\rho(x^k,x^*)$$

Покажем, что

$\frac{\beta}{1-\alpha}<1$

$\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{(\alpha+\beta)(1-\alpha)-(\alpha+\beta)(1-\alpha)+\beta}{1-\alpha}=$

$\underbrace{\alpha+\beta}$ $+\frac{\alpha(\alpha+\beta-1)<0}{1-\alpha}\le\alpha+\beta<1$ и т.к.

<1, из условий устойчивости

$\frac{\beta}{1-\alpha}<\alpha+\beta<1$

то скорость сходимости метода Зейделя выше, чем метода простой итерации

Релаксационные методы-отличие от метода Зейделя в ведении ускоряющего параметра

$$Ax=f\to\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j=f_i|\text{умножим на }\tau\ \forall i$$

и приведем к виду

$$x_i=x_i+\tau(f_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j)$$

и применим идею Зейделя для схемы а)

$$x_1^{k+1}=x_1^k+\tau(f_1-\textstyle\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_j^k)$$

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\tau(f_i-\textstyle\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{k+1}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^k)$$

$i=\overline{2,n},k=0,1,2,\cdots$ получим релаксационный алгоритм

Сходимость стационарных методов

$$B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau}+Ax^k=f,k\to\infty$$

Пусть B имеет обратную B^{-1} (для существования обратной достаточно потребовать положительности B т.е. $(Bx,x)>0,\forall x\to B>0$

Теорема. Пусть $A=A^*>0$-самосопряженная и выполнены условия $B>\frac{\tau}{2}A$,(имеется в виду $((B-\frac{\tau}{2}A)x,x)>0)$, тогда последовательность построенная по выше приведенному правилу сходится к x^*, решению уравнения $Ax^*\equiv f$.

Оператор А- самосопряженный, если $(Ax,x)=(x,Ax)\forall x\in V$ Для матриц $A^*=A'$

а)Если $B=E$ $\tau<\frac{2}{||A||},A=A^*>0$- метод простой итерации сходится

б) Метод Зейделя сходится если $A=A^*>0$

с) метод релаксации сходится, если $A=A^*>0$ и $0<\tau<2$

Заметим, что проверка условий положительности матриц общего вида затруднительна и часто уверенность в положительности дает тот факт, что матрица является следствием положительности оператора, аппроксимацией которого она является. Например,

$Au = -\frac{d^2u}{dx^2}, u \in L_{2[a,b]}, u|_a^b = 0$

$(Au, u) = -\int_a^b \frac{d^2u}{dx^2} = -u\frac{du}{dx}|_a^b + \int_a^b (\frac{du}{dx})^2 dx > 0$

Нестационарные методы Определение. Невязкой системы $Ax = f$ назовем $r^k = Ax^k - f, x^k \in R_n$. Очевидно, что если $x^k = x^*, \to r^k = 0$ Рассмотрим явный нестационарный процесс

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f, k \to \infty$$

$$x^{k+1} = x^k - \tau_k(Ax^k - f) = x^k - \tau_k r^k | A \pm f$$

получим

$$Ax^{k+1} - f = Ax^k - \tau_k Ar^k$$

или

$$r^{k+1} = r^k - \tau_k Ar^k = (E - \tau_k A)r^k$$

Для нахождения τ_k предложим следующие алгоритмы а) метод минимальной невязки

τ_k выбирается из минимума скалярного произведения

$$(r^{k+1}, r^{k+1}) \to \min_{\tau_k}$$

т.к.

$$(r^{k+1}, r^{k+1}) = (r^k - \tau_k Ar^k, r^k - \tau_k Ar^k) =$$
$$(r^k, r^k) - 2\tau_k(r^k, Ar^k) + \tau_k^2(Ar^k, Ar^k)$$
$$\frac{\partial}{\partial \tau_k}(r^{k+1}, r^{k+1}) = 0 \to \tau_k = \frac{(Ar^k, r^k)}{(Ar^k, Ar^k)}$$

б) метод наискорейшего спуска τ_k выбирается из условия ортогональности r^{k+1} и r^k

$$(r^{k+1}, r^k) = (r^k, r^k) - \tau_k(Ar^k, r^k) = 0 \to \tau_k = \frac{(r^k, r^k)}{(Ar^k, r^k)}$$

Условие сходимости метода $A = A^* > 0$