Лекция 2. **Численные методы решения линейных систем**

Для линейной системы

$$Ax = f, A = \{a_{ij}, i, j = \overline{1,n}\}, f = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

с невырожденной матрицей и следовательно $det(A) \neq 0$ откуда следует существование единственного решения (Вопрос устойчивости по отношению ошибок округления открыт ???) рассмотрим различные методы решения с помощью ЭВМ.

Методы можно разделить на две группы

1. Прямые методы -позволяющие получить решение исходной задачи за конечное число операций

2. Итерационные -общая идея которых заключается в в построении последовательности, сходящейся к решению поставленной задачи.

В первом случае задача состоит в построении алгоритма и его исследованию по отношению к ошибкам округления, во втором случае добавляется исследование ошибки, связанной с приближенностью алгоритма.

Прямые методы-основная идея всех алгоритмов - сведение исходной системы к системе либо с диагональной матрицей, либо к системе с либо с верхней треугольной матрицей, либо с нижней, которые затем легко решаются методом исключения. 1. A - диагональная

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

или

$A = \{a_{ii} \neq 0, a_{ij} = 0, i \neq j, i, j = \overline{1,n}\}$

в координатной форме система имеет вид

$a_{ii}x_i = f_i, i = \overline{1,n}$

и ее решение задается формулой

$x_i = \frac{f_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}$

Заметим, что здесь нет проблемы ошибок округления 2. A- нижняя треугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A = \{a_{ij}, a_{ij} = 0, j > i, i, j = \overline{1,n}\}$

или в координатной форме

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = f_n \end{array}$$

Ее решение задается формулой

$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j), i = \overline{1,n}$

3. A-верхняя треугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A = \{a_{ij}, a_{ij} = 0, i > j, i, j = \overline{1,n}\}$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= f_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= f_2 \\ &\cdots \\ a_{nn}x_n &= f_n \end{aligned}$$

Ее решение задается формулой

$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(f_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j), i = n, n-1, n-2, \cdots, 1$

Здесь возможно накопление ошибок округления

I. Метод Гаусса

Одним из прямых методов для решения линейных систем общего вида является хорошо известный метод последовательного исключения, связываемый с именем Гаусса.

Метод заключается в приведении исходной системы к системам уравнений с треугольными матрицами Различные модификации метода отличаются друг от друга путями приведения системы

Опишем одну из модификаций, которая называется компактной формой Гаусса. Эта модификация использует представление матрицы A как произведение нижней треугольной матрицы $B = \{b_{ij}, b_{ij} = 0, j > i, i, j = \overline{1,n}\}$ и верхней треугольной матрицы $C = \{c_{ij}, c_{ii} = 1, c_{ij} = 0, i > j, i, j = \overline{1,n}\}$:

$Ax = BCx = f, Cx = y, By = f$

(представление возможно, если, например, все главные миноры матрицы А отличны от нуля. Решение исходной системы сводится к последовательному решению систем $By = f$ и $Cx = y$ с треугольными матрицами. Нахождение матриц , и вектора у (из системы $By = b$) является прямым ходом метода, а нахождение вектора x из системы $Cx = y$ обратным ходом. Формулы для элементов матриц B и C получаются следующим образом:

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}, i, j = \overline{1,n}$

с другой стороны

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj} + b_{ii}c_{ij} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} b_{ki}c_{kj}}_{=0,\ \text{b-нижняя треугольная}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}}_{=0,\text{c-верхняя треугольная}} + b_{ij}\underbrace{c_{jj}}_{=1} + \sum_{k=j+1}^{n} b_{ki}c_{kj}$$

$$\begin{aligned} &c_{ii} = 1; \qquad b_{j1} = a_{j1}, \qquad j = 2, 3, ..., n; \\ &c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}}{b_{ij}}, i \geq j \\ &b_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}c_{ki}), i < j \end{aligned}$$

Метод квадратного корня-применяется для систем с симметрической матрицей

$A = \{a_{ij}, , a_{ij} = a_{ji}, i, j = \overline{1,n}\}$

Представим матрицу А в виде произведения $A = S'DS$ где S-верхняя треугольная матрица $S = \{s_{ij}, s_{ij} = 0, i > j, i, j = \overline{1,n}\}$ S'- транспонированная к S, D-диагональная

$D = \{d_{ii} \neq 0, d_{ij} = 0, i \neq j, i, j = \overline{1,n}\}$

$Ax = S'DSx = f, DS = y$

В результате имеем

$$\begin{aligned} S'y &= f - \\ DSx &= y - \end{aligned}$$

Для представления $A = S'DS$ заметим, что

$(DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}s_{kj} = d_{ii}s_{ij}$ или

$(S'DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki}d_{kk}s_{kj}$ и, следовательно,

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki}d_{kk}s_{kj}, (i,j = \overline{1,n})$

С другой стороны

$\sum_{k=1}^{n} s_{ki}d_{kk}s_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}d_{kk}s_{kj} + s_{ii}d_{ii}s_{ij} +$

$$\underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} s_{ki}d_{kk}s_{ki}}$$

=0, s-верхняя треугольная

Из последних двух равенств имеем $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki}d_{kk}s_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}d_{kk}s_{kj} + s_{ii}d_{ii}s_{ij}$

Замечая, что для $i = j$

$|s_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}$

и выбирая элементы диагональной матрицы D в форме

$d_{ii} = sign(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk})$

получаем

$s_{ii} = \sqrt{|a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}|}$

а для $i < j$

$s_{ij} = \frac{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}}{s_{ii}d_{ii}}$

Применяя поочередно последние формулы получаем алгоритм для нахождения коэффициентов матрицы S

Метод прогонки. Важным классом линейных систем являются системы вида:

$$\begin{array}{ll} x_0 = \kappa_1 x_1 + \mu_1 & \\ a_i x_{i-1} - c_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i, & \qquad i = 1,3,...,n-1 \\ x_n = \kappa_2 x_{n-1} + \mu_2 & \end{array}$$

с трехдиагональной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\kappa_1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & a_{n-1} & -c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & -\kappa_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Такие системы возникают при решении краевых задач для дифференциальных уравнений разностными методами.

Специальный вид матрицы A позволяет применить идею исключения неизвестных к исходной системе следующим простым способом, который носит название метода прогонки.

Первое уравнение системы дает соотношение между x_0 и x_1, в силу которого второе уравнение системы дает соотношение между x_1 и x_2. Следовательно, третье уравнение системы дает соотношение между x_2 и x_3 и т.д. Запишем связь между неизвестными x_{i-1} и x_i в виде:

$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = 1,3,...,n-1.$

Из первого уравнения системы следует, что

$\alpha_1 = \kappa_1, \qquad \beta_1 = \mu_1.$

Подставляя в i–е уравнение системы x_{i-1} получим

$x_i = -\frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}x_{i+1} + \frac{-f_i - \beta_i a_i}{c_i - a_i\alpha_i}.$

Сравнивая, находим рекуррентные соотношения

$\alpha_{i+1} = -\frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{-f_i - \beta_i a_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad i = 1,...,n,$

которые вместе с формулами для α_1, β_1 позволяют последовательно найти все прогоночные коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, i = 1,...,n$. Процесс нахождения этих коэффициентов называется прямым ходом метода прогонки. Из последнего уравнения системы и соотношения для $i = n$ находим

$x_n = \frac{\mu_2+\kappa_2\beta_n}{1-\alpha_n\kappa_2}$,

что позволяет по формулам $x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = n-1, n-2, ..., 0.$ последовательно найти все остальные неизвестные $x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0$. (обратный ход метода прогонки)

Достаточные условия алгоритма устойчивости прогонки Если $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, |\kappa_1| \leq 1, |\kappa_2| \leq 1, |\kappa_1| + |\kappa_2| < 2$ то алгоритм прогонки устойчив относительно ошибок округления

Доказательство: Рассмотрим устойчивость обратного хода прогонки. Для этого достаточно выполнения условия

$|\alpha_i| \leq 1$

Доказательство проведем по индукции. Предположим, что если

$|\alpha_i| \leq 1, \qquad$ то, следовательно, $\qquad |\alpha_{i+1}| \leq 1$

Для этого рассмотрим

$|c_i - a_i\alpha_i| - |b_i| \geq |c_i| - |a_i||\alpha_i| \geq |a_i| + |b_i| - |a_i||\alpha_i| - |b_i| = |a_i|(1-|\alpha_i|) \geq 0$ и, следовательно, $|\alpha_i| = \frac{|b_i|}{|c_i - a_i\alpha_i|} \leq 1$ Покажем далее, что $1 - \kappa_2\alpha_n \neq 0$ Действительно, из предыдущих рассуждений следует, что если для произвольного i_0 имеет место строгое неравенство

$|c_{i_0}| > |a_{i_0}| + |b_{i_0}|$, то и$|\alpha_i| < 1$ для $i > i_0$.

Пусть $|\kappa_1| < 1$, тогда $|\alpha_1| = |\kappa_1| < 1$ и $|\alpha_n| < 1$ а, следовательно,

$|1 - \alpha_n\kappa_2| \leq 1 - |\alpha_n||\kappa_2| > 1 - |\kappa_1| > 0$

Откуда следует, что $|1 - \alpha_n\kappa_2| \neq 0$

Пусть $|\kappa_1| = 1$ а следовательно т.к. $|\kappa_1| + |\kappa_2| < 2$, то $|\kappa_2| < 1$ И следовательно $|1 - \alpha_n\kappa_2| \leq 1 - |\alpha_n||\kappa_2| \leq 1 - |\kappa_1| > 0$

Таким образом, в обратном ходе ошибки округления не нарастают. В прямом ходе можно показать, что

$max_{0 \leq i \leq n}|\overline{x_i} - x_i| \leq \epsilon_2 n^2$ где ϵ_2 -ошибка округления, т.е. машинное ерсилон