Лекция 13.
Порядок точности явной схемы Эйлера

$$\frac{du}{dt} = f(t,u)$$
$$u(0) = u^0, \qquad f(t,u) \in G = \{0 \le t \le T, |u - u^0| \le U\}$$

$$[0,T] \to \omega_\tau = \{t_i : 0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_n \le T,$$
$$\tau = t/n, t_i = \tau(i-1), i = \overline{0,n}\},$$
$$u_{i+1} = u_i + \tau f(t_i, u_i),$$
$$u_0 = u^0, ß = \overline{0, n-1}$$

Здесь u_i -приближенное решение задачи.

Пусть $u(t_i)$- точное решение. Интерес представляет мера близости между точным решением приближенным, а также накопление возможных ошибок в приближенном алгоритме. Меру близости будем оценивать с помощью $||\{u(t_i)\}_{i=0}^n - \{u_i\}_{i=0}^n||_{R_n}$.

Предварительно докажем лемму

Лемма Гронуолла Пусть $\alpha, \beta > 0$, $\gamma_0 = 0$. Тогда из неравенства

$\gamma_{i+1} \le \gamma_i(1+\alpha) + \beta$ следует, что

$\gamma_i \le \beta \frac{\exp(i\alpha) - 1}{\alpha}$.

Док-во: для $i = 0$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что лемма справедлива для любого i и докажем справедливость леммы для $i + 1$.

$\gamma_{i+1} \le \gamma_i(1+\alpha) + \beta \le (1+\alpha)\beta \frac{\exp(i\alpha)-1}{\alpha} + \beta =$
$\beta \frac{\exp(i\alpha)(1+\alpha)-1}{\alpha} \le \beta \frac{\exp(i\alpha)(\exp(\alpha)-1}{\alpha} = \beta \frac{\exp((i+1)\alpha)-1}{\alpha}$

Порядок точности явной схемы Эйлера. Пусть $M_0 = \max_G |f|, \qquad M_1 = \max_G |f'_t|, \qquad M_2 = \max_G |f'_u|$

$||\{u(t_i)\}_{i=0}^n - \{u_i\}_{i=0}^n||_{R_n} =$? Для точного решения имеем $u(t_{i+1}) =$ используем разложение в ряд Тейлора $= u(t_i) + \tau u'(t_i) + \frac{\tau^2}{2} u''(\zeta_i), \qquad \zeta_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$u' = f \to u(t_{i+1} = u(t_i) + \tau f(t_i, u(t_i)) + \frac{\tau^2}{2} u''(\zeta_i)$

Приближенное решение в методе Эйлера задается равенством

$u_{i+1} = u_i + \tau f(t_i, u_i)$.

Вычитая из первого равенства второе будем иметь

$|u(t_{i+1}) - u_{i+1}| = |u(t_i) - u_i + \tau f(t_i, u(t_i)) - \tau f(t_i, u_i) + \frac{\tau^2}{2} u''(\zeta_i)| =$
$u'' = (u')' = (f)'_t = f'_t + f'_u f$
$\le |u(t_i) - u_i| + \tau |f(t_i, u(t_i)) - \ f(t_i, u_i)| + \frac{\tau^2}{2}(|f'_t| + f'_u||f|) =$

используя формулу конечных приращений Лагранжа

$f(x) - f(y) = \int_0^1 f'_\omega(x + \omega(x-y)) d\omega (x-y)$ $|u(t_{i+1}) - u_{i+1}| \le |u(t_i) - u_i| + \tau |f_u||u(t_i) - u_i| + \frac{\tau^2}{2}(|f'_t| + f'_u||f|) \le |u(t_i) - u_i| + \tau M_2 |u(t_i) - u_i| + \frac{\tau^2}{2}(M_1 + M_2 M_0)$

Применяя к полученному неравенству лемму Гронуолла, будем иметь

$|u(t_i) - u_i| \le \frac{\tau^2}{2}(M_1 + M_2 M_0) \frac{M_1 + M_2 M_0}{\tau M_2}(\exp(i\tau M_2) - 1)$

$||\{u(t_i)\}_{i=0}^n - \{u_i\}_{i=0}^n||_{R_n} = \max_{0 \le i \le n} |u(t_i) - u_i| = \tau \frac{M_1 + M_2 M_0}{M_2}(\exp(TM_2) - 1) \sim O(\tau)$

Аппроксимация, устойчивость, сходимость для линейных разностных схем

Пусть на отрезке $[0,T]$ Линейное уравнение $Lu = f$ имеет решение $u(t)$. Пусть далее задан приближенный алгоритм(разностная схема) решения на равномерной сетке ω_τ

$L_\tau u_\tau = f_\tau, \qquad \tau$- параметр схемы

Пример:

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = f(t)$$
$$u(0) = u^0,$$

$$Lu = \begin{cases} \frac{du}{dx} + \lambda u & t \in (0,T] \\ u(0), & t = 0 \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} f(t) t \in (0, T] \\ u^0, \qquad t = 0 \end{cases}$$

$$u_{i+1} = u_i - \tau\lambda u_i + \tau f_i,$$
$$u_0 = u^0, ß = \overline{0, n-1}$$

$$L_\tau u_\tau = \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \lambda u_i \qquad i = \overline{1, n} \\ u_0, \qquad i = 0 \end{cases}$$

$$f_\tau = \begin{cases} f_i = f(t_i) \qquad i = \overline{1, n} \\ u^0, \qquad i = 0 \end{cases}$$

Опр. Погрешностью аппроксимации оператора L оператором L_τ на решении $u(t)$ уравнения $Lu = f$ назовем функцию

$\Psi(t) = Lu(t) - L_\tau u(t)$

В нашем примере $\Psi(t) = \frac{du}{dt}|_{t=t_i} + \lambda u(t_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i) = f(t_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i)$

Опр. Будем говорить, что оператор L_τ имеет $m-$порядок аппроксимации на сетке ω_τ, если

$||\Psi||_\tau = ||L_\tau u - Lu||_\tau \sim O(\tau^m), \qquad ||\Psi||_\tau = M\tau^m$ Здесь и далее под символом $||.||_\tau$ понимается норма в R_n для сеточной функции заданной на сетке ω_τ

Пример: $\Psi = f(t_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i) = f(t_i) - \frac{u(t_i) + \tau u'(t_i) + \tau^2/2 - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i) = f(t_i) - u'(t_i) - \lambda u(t_i) - \frac{\tau}{2} u''(t_i)$

$||\Psi|| \sim O(\tau)$

Опр. Будем говорить, что разностная схема $L_\tau u_\tau = f_\tau$ устойчива, если существует постоянная $M > 0$, незавизящая от выбора f_τ такая, что имеет место оценка

$||u_\tau|| \le M||f_\tau||$.

Опр. Будем говорить, что разностная схема $L_\tau u_\tau = f_\tau$ корректна, если существует единственное решение разностной схемы при любых входных данных f_τ и выполнены условия устойчивости.

Пример: $\frac{du}{dt} + \lambda u = 0$

$u(0) = u^0$

Разностная схема

$u_{i+1} = u_i - \lambda\tau u_i, \quad u_0 = u^0, i = \overline{0, n-1}$

$u_{i+1} \le (1 - \tau\lambda)u_i, \text{если} |1 - \tau\lambda| < 1 \to |u_{i+1}| \le |u_i| \le \dots \le |u_0|$

$|1 - \tau\lambda| < 1 \to \lambda\tau < 2$

Следствие: 1. Устойчивость означает непрерывную зависимость решения разностной схемы $L_\tau u_\tau = f_\tau$ от входных данных равномерную относительно τ.

Пусть $L_\tau \overline{u_\tau} = \overline{f_\tau}$

$L_\tau u_\tau = f_\tau$

Вычитая из второго первое равенство, имеем

$L_\tau(u_\tau - \overline{u_\tau}) = (f_\tau - \overline{f_\tau})$ из условий устойчивости следует, что

$||\overline{u_\tau} - u_\tau|| \le M||_\tau \overline{f_\tau} - f_\tau||_\tau$

2. Если разностная схема $L_\tau u_\tau = f_\tau$ корректна, то существует обратный оператор $L_\tau^{-1} \to u_\tau = L_\tau^{-1} f_\tau \to ||u_\tau|| \le ||L_\tau^{-1}||||f_\tau|| \to$ из условий устойчивости, что

$$||L_\tau^{-1}|| \le M$$

т.е. имеет место равномерная ограниченность обратного оператора при выполнении условий устойчивости.

Связь устойчивости, аппроксимации разностной схемы с порядком точности приближенного решения.

Задача $||u(t_i)_{i=0}^n - u_\tau|| = ?$

Обозначим $z_\tau = u_\tau - u \to u_\tau = z_\tau + u \to L_\tau u_\tau = f_\tau \to L_\tau z_\tau = f_\tau - L_\tau u = f_\tau - f + f - L_\tau u = f_\tau - f + Lu - L_\tau u = \Psi_\tau$- погрешность аппроксимации оператора L оператором L_τ

Опр. Будем говорить, что решение разностной схемы сходится к точному решению, если

$$||z_\tau|| \to 0 \quad \tau \to 0$$

$L_\tau z_\tau = \Psi_\tau$ из условий устойчивости следует, что $||z_\tau||_\tau \leq M||\Psi_\tau||_\tau$ следовательно, если выполнено условие аппроксимации т.е. $||\Psi_\tau||_\tau \sim O(\tau^m)$ тогда $||z_\tau||_\tau \to 0 \quad \tau \to 0$

В этом смысле и говорят, что из аппроксимации и устойчивости решения разностной схемы следует сходимость приближенного решения к точному и для сходимости достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость.

Устойчивость разностных схем для решения задачи Коши. Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{ll} \frac{du}{dt} = f(t,u) & \\ u(0) = u^0, & f(t,u) \in G = \{0 \leq t \leq T, |u-u^0| \leq U\} \end{array}$$

и возмущенную

$$\begin{array}{ll} \frac{d\overline{u}}{dt} = \overline{f}(t,\overline{u}) & \\ \overline{u}(0) = \overline{u}^0, & \overline{f}(t,u) \in G = \{0 \leq t \leq T, |u-u^0| \leq U\} \end{array}$$

Вычитая из второй задачи первую, будем иметь для $z = \overline{u} - u$

$$\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = \overline{f}(t, z+u) - f(t,u) \\ z(0) = \overline{u}^0 - u^0 = \delta u \end{array}$$

Применяя к последнему равенству формулу конечных приращений, для нахождения z, будем иметь уравнение

$$\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} + \lambda u = 0 \\ z(0) = \delta u, \quad \lambda = -f'_u(t,\zeta) \end{array}$$

Если $f_u < 0 \to \lambda > 0 \to z = \delta u \exp(-\lambda t) \to$ решение задачи Коши устойчиво (локально) по отношению к возмущению правой части и начальных данных. Аналогично поступим и для исследования устойчивости разностных схем

1. Схема Эйлера

$$\begin{array}{l} u_{i+1} = u_i + \tau f(t_i, u_i), \\ u_0 = u^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{array}$$

Рассмотрим возмущенную разностную схему

$$\begin{array}{l} \overline{u}_{i+1} = \overline{u}_i + \tau \overline{f}(t_i, \overline{u}_i), \\ \overline{u}_0 = \overline{u}^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{array}$$

Вычитая из второй задачи первую для $z = \overline{u}_i - u_i$, будем иметь

$$\begin{array}{l} z_{i+1} = z_i + \tau \overline{f}(t_i, z_i + u_i) - f(t_i, u_i), \\ z_0 = \overline{u}^0 - u_0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{array}$$

Используя формулу конечных приращений, получим

$$\begin{array}{l} z_{i+1} = z_i + \tau f'(...) z_i = (1 - \lambda\tau) z_i, \lambda = -f'_u \\ z_0 = \overline{u}^0 - u_0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{array}$$

Видим, что устойчивость разностной схема сводится к локальной устойчивости, т.е. устойчивости линейной разностной Эйлера в окрестности некоторой точки

Очевидно, что для устойчивости в этом случае достаточно, чтобы $|1 - \lambda\tau| < 1 \to \tau\lambda < 2, \lambda > 0$

Для исследования устойчивости остальных схем, будем рассматривать линеаризованное уравнение

2. Неявная схема Эйлера

$$u_{i+1} = u_i - \tau\lambda u_{i+1},$$
$$u_0 = u^0, \quad i = \overline{0, n-1}$$

$u_{i+1} = \frac{1}{1+\tau\lambda} u_i \to |\frac{1}{1+\tau\lambda}| < 1 \to$ устойчивость для любых $\tau, \lambda > 0$

3. Схема Роте с весами

$$u_{i+1} = u_i - \lambda\tau[\alpha u_{i+1} + (1-\alpha)u_i], 0 \leq \alpha \leq 1$$
$$u_0 = u^0, \quad i = \overline{0, n-1}$$

$u_{i+1} = \frac{1-\tau\lambda(1-\alpha)}{1+\tau\lambda\alpha} u_i \to$

$|\frac{1-\tau\lambda(1-\alpha)}{1+\tau\lambda\alpha}| < 1$ откуда следует, что схема безусловно устойчива(для всехτ) для $\alpha \geq 0.5$ и устойчива при $\tau = \frac{1}{(0.5-\alpha)\lambda}$,$\lambda > 0$

4. Схема предиктор-корректор

$$u^*_{i+1} = u_i - \tau\lambda u_i,$$
$$u_{i+1} = u_i - \frac{\tau\lambda}{2}[u_i + u_{i+1}],$$
$$u_0 = u^0, \quad i = \overline{0, n-1}$$

$u_{i+1} = u_i[1 - \tau\lambda + \frac{\tau^2\lambda^2}{2}] \to$

$|(1 - \tau\lambda + \frac{\tau^2\lambda^2}{2})| < 1 \to \tau\lambda < 2, \lambda > 0$

5. Схема Рунге-Кутты 4-го порядка

$$u_{i+1} = u_i - \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$u_0 = u^0, \quad i = \overline{0, n-1}$$

$k_1 = f(t_i, u_i) = -\lambda u_i,$

$k_2 = f(t_i, 0.5\tau, u_i + 0.6\tau k_1) = -\lambda[u_i + 0.5\tau k_1] = [0.5\tau\lambda^2 = \lambda]u_i$

$k_3 = f(t_i, u_i + 0.5\tau k_2) = u_i[\lambda + \frac{\tau}{2}\lambda^2 - \frac{\tau^2}{4}\lambda^2]$

$k_4 = f(t_i, u_i + \tau k_3) = u_i[\lambda + \tau\lambda^2 - \frac{\tau^2}{2}\lambda^3 + \frac{\tau^3}{8}\lambda^4]$

$u_{i+1} = u_i[1 - \tau\lambda + \frac{\tau^2\lambda^2}{2} - \frac{\tau^3\lambda^3}{6} + \frac{\tau^4\lambda^4}{24}]$

$|1 - \tau\lambda + \frac{\tau^2\lambda^2}{2} - \frac{\tau^3\lambda^3}{6} + \frac{\tau^4\lambda^4}{24}| < 1 \to$

$\tau\lambda < 278, \lambda > 0$