Численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Для простоты рассмотрим уравнение первого порядка и затем распространим результаты на системы первого порядка. Пусть требуется найти на интервале $[0,T]$ найти функцию $u=u(t)$ удовлетворяющую уравнению

$\frac{du}{dt}=f(t,u)$

с условием $u(0)=u^0$ для всех $t\in[0,T]$

Пусть функция $f(t,u)$ -непрерывная функция своих аргументов в прямоугольнике $G=\{(t,u): 0\le t\le T, |u-u^0|\le U\}$ удовлетворяет условию Липшица

$|f(t,u^1)-f(t,u^2)|\le K|u^1-u^2|(t,u^1),(t,u^2)\in G$, K-постоянная. Из курса ОДУ мы знаем, что в этих условиях уравнение имеет единственное решение в окрестности точки $t=0$ и, кроме того, поставленная задача эквивалентна решению интегрального уравнения

$u(t)=u^0+\int_0^t f(t,u(t))dt$

В дальнейшем будем предполагать, что функция $f(t,u)\in C_G^m$ и задача Коши имеет решение на всем интервале $[0,T]$.

Для построения численных алгоритмов отрезку $[0,T]\to\omega_\tau=\{t_i;t_i=i\tau, i=\overline{0,n}, \tau=T/n\}$сетку, и $u\in C_{[0,T]}\to T_\tau C=R_n, T_\tau u=\{u(t_i)\}_{i=0}^n$-сеточная функция. Здесь и далее $u(t_i)$- точное решение задачи Коши в точке $t_i\in[0,T]$, u_i- приближенное значение решения.

Группа методов, основанных на разложении в ряды Тейлора Наиболее простым методом построения решения в точке t_{i+1}, если известно решение в точке t_i является способ основанный на разложении в ряд Тейлора

$u(t_{i+1})=u(t_i)+\tau\Delta(t_i,u(t_i),\tau)$

$\Delta(t,u,\tau)=u'(t)+\frac{\tau}{2}u''(t)=\frac{\tau^2}{3}u'''(t)+\cdots$

Если в этом разложении ряд оборвать на p члене и заменить точное значение $u(t_i)$ его приближенным значением u_i, то при помощи исходного уравнения можно получить алгоритм

$u_{i+1}=u_i+\tau\varphi(t_i,u_i,\tau), i=\overline{o,n-1}$

$\varphi=f(t,u)+\frac{\tau}{2}f'+\cdots+\frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(t,u)$ Под производной здесь понимается полная производная по t

Так в случае $p=1$ имеем метод Эйлера

$\begin{cases} u_{i+1}=u_i+\tau f(t_i,u_i) \\ u_0=u^0,\ i=\overline{0,n-1}\end{cases}$

Для $p=2$

$\begin{cases} u_{i+1}=u_i+\tau[f(t_i,u_i)+ \\ \frac{\tau}{2}(f_t(t_i,u_i)+f_u(t_i,u_i))f(t_i,u_i)] \\ u_0=u^0,\ i=\overline{0,n-1}\end{cases}$

В каждом из этих алгоритмом можно последовательно, зная u_0 получить все приближенные значения u_i в точках сетки.

Применимость метода ограниченна случаем функций $f(t,u)$ для которых легко вычисляются полные производные высших порядков

Чаще используется подход, основанный на построении приближенных формул для φ максимально близких кΔ и не содержащих производных высших порядков. В качестве примера построения алгоритма для решения задачи Коши путем такой "подгонки"рассмотрим метод Хойна

Здесь

$\varphi(t,u,\tau)=c_1f(t,u)+c_2f(t+a_2\tau,u+b_{21}\tau f(t,u))$

c_1,c_2,a_2,b_{21}-постоянные подлежащие определению путем их выбора из максимальной по возможности близости функций φ и Δ.

Разлагая φ по степеням τ до членов порядка h^2, получим $\varphi(t,u,\tau)=(c_1+c_2)f(t,u)+\tau c_2[a_2f_t(t,u)+b_{21}f_u(t,u)f(t,u)]+O(\tau^2)$.

С другой стороны,

$\triangle(t,u,\tau)=f(t,u)+\frac{1}{2}\tau[f_t(t,u)+f_t(t,u)f(t,u)]+O(\tau^2)$.

Отсюда видно, что взяв

$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_2a_2=\frac{1}{2} \\ c_2b_{21}=\frac{1}{2},\end{cases}$

получаем в функцию, для которой

$\varphi(t,u,\tau) - \triangle(t,u,\tau) = O(\tau^2)$.

Алгебраическая система имеет множество решений вида

$c_1 = 1-\alpha,\ c_2 = \alpha,\ a_2 = b_{21} = \frac{1}{2\alpha}$,

где α - свободный параметр.

При $\alpha = \frac{1}{2}$, в частности, получаем двукратный *замечание: Под кратностью метода в данном случае понимается количество вычислений функции* $f\,(t,u)$.

метод Рунге-Кутты-метод Хойна:

$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{\tau}{2}[f(t_i,u_i) + f(t_{i+1}, u_i + \tau f(t_i,u_i))], \\ u_0 = u^0,\ i = \overline{0,n-1},\ x_i \in \omega_n, \end{cases}$ требующий всего два вычисления функции $f(t,u)$ на каждом шаге.

Процесс "подгонки" рядов Тейлора можно продолжить, строя функции $\varphi(t,u,\tau)$, использующие все большие отрезки ряда Тейлора. Подобным образом получают *m-кратные явные методы Рунге-Кутты:*

$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + h\varphi(t_i,u_i,\tau) \\ u_0 = u^0,\ i = \overline{0,n-1},\ x_i \in \omega_n, \end{cases}$

$\varphi(t,u,\tau) \equiv \sum_{r=1}^{m} c_r k_r$,

$k_1 \equiv f(t,u)$,

$k_r \equiv f(t+\tau a_r, u + \tau\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}k_s),\ r = \overline{2,m}$, требующие m вычислений функции $f\,(t,u)$ на каждом шаге.

Наиболее известным из них является четырехкратный метод:

$\begin{cases} u_{i+1} = i_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ u_0 = u^0,\ i = \overline{0,n-1},\ t_i \in \omega_n, \end{cases}$

$k_1 \equiv f(t_i,u_i)$,

$k_2 \equiv f(t_i + \frac{1}{2}\tau, u_n + \frac{1}{2}\tau k_1)$,

$k_3 \equiv f(t_i + \frac{1}{2}\tau, u_i + \frac{1}{2}\tau k_2)$,

$k_4 \equiv f(t_i + \tau, u_i + \tau k_3)$.

Алгоритмы Рунге-Кутты отлично приспособлены для практических вычислений: они не требуют вычисления дополнительных начальных данных и легко позволяют менять шаг τ.

Усложняя формулы, можно получить и более широкий класс методов,

Другой подход построения алгоритмов решения задачи Коши связан с построением алгоритмов решения эквивалентного задачи Коши интегральному уравнению. На сетке ω_n интегральное уравнение представляется в виде

$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,u(t))dt, \qquad u_0 = u^0, i = \overline{0,n-1},\ t_i \in \omega_n$,

Для вычисления интеграла можно воспользоваться квадратурной формулой и свести решение задачи Коши к выполнению алгоритма

$u_{i+1} = u_i + \sum_{k=0}^{M} C_k^{(M)} f(\eta_k,u_k)$,

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0,n-1}$,

$\eta_k \in \omega_M\{\eta_k : t_i = \eta_0 < \eta_1 \cdots < \eta_M = t_{i+1}\}$

Примеры: а) явный метод Эйлера (вычисление интеграла заменяется вычислением по квадратурной формуле прямоугольников)

$u_{i+1} = u_i + \tau f(t_i,u_i)$,

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0,n-1}$,

б) Неявный метод Эйлера (вычисление интеграла заменяется вычислением по квадратурной формуле прямоугольников)

$u_{i+1} = u_i + \tau f(t_{i+1},u_{i+1})$,

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0,n-1}$,

с) симметрический неявный алгоритм (частный случай схемы Роте) (вычисление интеграла заменяется вычислением по квадратурной формуле трапеций)

$u_{i+1} = u_i + \frac{\tau}{2}(f(t_i,u_i) + f(t_{i+1},u_{i+1}))$,

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0,n-1}$, д) схема Роте (вычисление интеграла заменяется вычислением по квадратурной формуле трапеций с весами)

$u_{i+1} = u_i + \frac{\tau}{2}(\alpha f(t_i, u_i) + (1-\alpha) f(t_{i+1}, u_{i+1})),$

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0, n-1}, \qquad \alpha \in [0,1]$

е) Схема предиктор-корректор

Известно, что задача Коши имеет непрерывное решение в окрестности точки t_i, следовательно для решения нелинейного уравнения итерационным методом можно взять в качестве начального приближения решения полученное по любому явному алгоритму, на пример схеме Эйлера, и ограничится одним шагом итерационного метода. В результате будем иметь алгоритм

$u^*_{i+1} = u_i + \tau f(t_i, u_i),$

$u_{i+1} = u_i + \frac{\tau}{2}(\alpha f(t_i, u_i) + (1-\alpha) f(t_{i+1}, u^*_{i+1})),$

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0, n-1}, \qquad \alpha \in [0,1]$

ж) Схемы Адамса

Для вычисления интегралов можно использовать интерполяционные многочлены и выше первой степени, используя информацию о решении u слева от интервала $[t_i, t_{i+1}]$ на интервале $[t_{i-m}, t_{i+1}]$ изаменить функцию f ее интерполянтой, например Лагранжа

$f \to f^L(t) = \sum_{k-m}^{i+1} f(t_i, u_i) \prod_{j=i-m, j\neq k}^{i+1} \frac{t-t_j}{t_k-t_j}$

В результате имеем алгоритм

$u_{i+1} = u_i + \sum_{k=0}^{m} C_k f(t_{i-k}, u_{k-i})$

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0, n-1}$

Недостающие значения u_i вычисляются по любому явному методу. Для $m = 1$ будем иметь

$f^L(t) = f(t_{i-1}, u_{i-1}) \frac{t-t_i}{t_{i-1}-t_i} + f(t_i, u_i) \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}$

$u_{i+1} = u_i + \frac{\tau}{2}[f(t_i, u_i) + 0.5(f(t_i, u_i) - f(t_{i-1}, u_{i-1}))]$

$u_0 = u^0, \qquad i = \overline{0, n-1}$