Лекция 10.**Численное интегрирование** Рассмотрим в пространстве $H_{[a,b]}$ интеграл

$A[f]=\int_a^b f(x)dx : f\in H_{[a,b]}\to R_1$ т.е операцию интегрирования можно рассматривать как функционал действующий в пространстве $H_{[a,b]}$. Функционал $A[f]$ аппроксимируем последовательностью конечномерных функционалов $A_n : R_n \to R_1$ имеющих областью определения пространство R_n и областью значений пространство R_1, $A_n[f^n], f^n=T_n[f]$. Здесь T_n- оператор проектирования пространства $H_{[a,b]}$ на пространство R_n с областью определения $\omega_n=\{x_i^{(n)} : a\le x_0^{(0)}\le x_1^{(n)}\le\cdots\le x_n^{(n)}\le b\}$.

Опр. Будем говорить, что на элементе $f\in H_{[a,b]}$ выполнено условие аппроксимации или иными словами последовательность конечномерных функционалов $A_n[f^n]$ аппроксимирует функционал $A[f]$, если

$\|A_n[T_n[f^n]]-A[f]\|_{R_n}\to_{n\to\infty} 0$

Пример: $H_{[a,b]}=C^m_{[a,b]}, T_nf=\{f(x_i^{(n)}\}_{i=0}^n=\{f_i\}_{i=0}^n$- сеточная функция

Общий вид аппроксимирующего функционала, который называют квадратурной формулой

$A_nf^f=\sum_{i=0}^n C_i^{(n)}f(x_i^{(n)}$, $C_i^{(n)}$- весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию

$\sum_{i=0}^n C_i^{(n)}=b-a$

$x_i^{(n)}$- узлы квадратурной формулы.

Функционал

$\delta_n[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{i=0}^n C_i^{(n)}f(x_i^{(n)})$- называют функционалом погрешности квадратурной формулы.

$2(n+1)$- параметров $(x_i^{(n)}, C_i^{(n)})$- квадратурной формулы выбирают так, чтобы функционал погрешности обращался в ноль на некотором классе функций или был минимальным.

Опр. Будем говорить, что последовательность функционалов $\{A_nf\}, n\to\infty, f\in H_{[a,b]}$ слабо сходится к функционалу $A[f], f\in H_{[a,b]}$, если

$A_n[f]\to A[f]$, $n\to\infty$ для любого элемента $f\in H_{[a,b]}$

Опр. Будем говорить, что последовательность функционалов $\{A_nf\}, n\to\infty, f\in H_{[a,b]}$ сильно сходится к функционалу $A[f], f\in H_{[a,b]}$, если

$\|A_n[f]-A[f]\|=\sup\limits_{f\ne 0}\frac{\|A_n[f]-A[f]\|}{\|f\|}\to 0, n\to\infty$

Т.1 Ни для какой системы узлов и весовых коэффициентов квадратурной формулы функционал погрешности не стремится сильно к нолю на $C_{[a,b]}$, более того

$\|\delta_n[f]\|=b-a+\sum_{k=0}^n C_k^{(n)}|$

Иными словами из теоремы следует, что существует функция из класса $C_{[a,b]}$ такая, что для нее невозможно построить квадратурную формулу для целого класса функций, т.е. численно правильно вычислить интеграл.

Однако для практических приложений важен другой факт, состоящий в том что функционал погрешности $\delta_n[f]\to 0$ слабо на классе $C_{[a,b]}$. Более того, в приложениях, как правило, имеют дело с некоторым компактом (множество где может быть выделены фундаментальная последовательность) $X\in C_{[a,b]}$ и тогда для $f\in X$ можно указать даже порядок стремления к нулю функционала погрешности. Из слабой сходимости следует, вообще говоря факт, что для каждой функции следует строить свою квадратурную формулу

Т. Для того, чтобы последовательность функционалов $\delta_n[f]$ слабо стремился к нулю для любой функции из класса $C_{[a,b]}$ необходимо и достаточно, чтобы

$\sum_{k=0}^n |C_k^{(n)}|<K-const$ для всех n

Т. Если все весовые коэффициенты квадратурной формулы положительны то последовательность функционалов $\delta_n[f]$ слабо стремился к нулю для любой функции из класса $C_{[a,b]}$

Теоремы говорят, что для любой функции из $C_{[a,b]}$ можно построить квадратурную формулу выбором узлов и весовых коэффициентов квадратурной формулы

Построение квадратурных формул интерполяционного типа

Пусть функция $f\in C_{[a,b]}^{n+1}$ bи требуется построить квадратурную формулу для вычисления интеграла

$\int_a^b f(x)p(x)dx$- $p(x)$- заданная весовая функция

Интервалу $[a,b]$ поставим в соответствие сетку $\omega_n = \{x_i^{(n)} : a \leq x_0^{(n)} \leq \dots \leq x_n^{(n)} = b\}$ и с помощью оператора проектирования $T_n f(x) = \{f(x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$- функции $f(x)$ поставим в соответствие сеточную функцию на сетке ω_n. Далее сеточную функцию заменим интерполяционным многочленом Лагранжа.

$f^L(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k^{(n)}) e_k(x), e_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} = \frac{\omega_n(x)}{x - x_k^{(n)}} \omega_n'(x)$, $\omega_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k^{(n)})$

$\int_a^b f(x)p(x)dx \to \int_a^b f^L(x)p(x)dx =$

$\int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k^{(n)}) l_k^n(x)p(x)dx =$

$\sum_{k=0}^n [\int_a^b l_k^n(x)p(x)dx] f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k^{(n)}),$

$C_k^{(n)} = \int_a^b l_k^n(x)p(x)dx$

Построенные таким образом квадратурные формулы называют квадратурными формулами Ньютона-Котеса. Заметим, что формулы Ньютона-Котеса точны для функций $P_{N-1}(x)p(x), P_{N-1}$- многочлен степени $N-1$, т.к. в этом случае $f(x)p(x) = f^L(x)p(x)$

Примеры построения квадратурных формул на равномерных сетках:

Пусть $p(x) = 1$ и $[a,b] \to \omega_n = \{x_i : x_i = a + \frac{b-a}{n} i, i = \overline{0,n}\}$

$\int_a^b f(x)dx \to (b-a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(a + k\frac{b-a}{n}), C_k^{(n)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{i=0, i\neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx$

1. Квадратурная формула трапеций $n = 1$

$\omega_n = \{a, b\},$

$\int_a^b f(x)dx \to \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)], C_0^1 = C_1^1 = \frac{1}{2} > 0, C_0^1 + C_1^1 = 1 > 0$; Геометрическая интерпретация.

2. Квадратурная формула Симпсона $n = 2$

$\omega_n = \{a, \frac{a+b}{2} b\},$

$\int_a^b f(x)dx \to (b-a)[\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f(fraca + b2) + \frac{1}{6}f(b)], C_0^2 = C_2^2 = \frac{1}{6} > 0, C_1^2 = \frac{4}{6} > 0, C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 = 1 > 0$; Геометрическая интерпретация.

3. Квадратурная формула под названием "правила $\frac{3}{8}$"$n = 3$

$\omega_n = \{a, \frac{2a+b}{3} \frac{a+2b}{3} b\},$

$\int_a^b f(x)dx \to (b-a)[\frac{1}{8}f(a) + \frac{3}{8}f(\frac{2a+b}{3}) + \frac{3}{8}f(\frac{a+2b}{3}) + \frac{1}{8}f(b)], C_0^3 = C_3^3 = \frac{1}{8} > 0, C_1^3 = C_2^3 \frac{3}{8} > 0, C_0^3 + C_1^3 + C_3^2 + C_3^3 = 1 > 0$; Геометрическая интерпретация.

Заметим, что для коэффициентов выполнены условия выше изложенных теорем. Оказывается, что начиная с $n = 8$ среди коэффициентов квадратурных формул Ньютона-Котеса появляются отрицательные. Имеют место теоремы

Т. Для весовых коэффициентов квадратурных формул Ньютона-Котеса имеет место утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n |C_k^{(n)}| = \infty$

Т. Существуют непрерывные функции для которых процедура численного интегрирования основанные на квадратурных формулах Ньютона-Котеса неограниченно расходятся

Иными словами процедура повышения степени интерполяционного многочлена Лагранжа при построении квадратурных формул - процедура тупиковая.

На практике квадратурные формулы Ньютона-Котеса используют только для $n < 9$.

Замечание. Если при интерполяции интерполяционный многочлен Лагранжа заменить на интерполяционный многочлен Лежандра, а за узлы квадратурной формулы вибирать корни многочленов Лежандра, то процедура повышения степени интерполяционного многочлена не является тупиковой и построенные таким образом квадратурные формулы носят название квадратурных формул Гаусса.

Погрешности квадратурных формул Ньютона-Котеса

При $f(x) \in C_{[a,b]}^{N+1}, \qquad p(x) = 1$

$f(x) = f^L(x) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k), \xi \in [a,b];$

Следовательно, функционал погрешности вычисляется для $p(x) = 1$ по формуле

$\delta_n[f] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{k=0}^n (x - x_k)dx$

1. Квадратурная формула трапеций $n = 1$

$\delta_n[f] = \frac{f''(\xi)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b)dx \leq \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}$

2. Квадратурная формула Симпсона $n = 2$

$\delta_n[f] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b (x-a)(x-\frac{(b-a)}{2})^2(x-b)dx \le \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)^5}{2880}$

При вычислении использовано правило: если квадратурные формулы Ньютона-Котеса имеют симметричные узлы относительно середины отрезка $[a, b]$ и весовые коэффициенты симметричны, то такие квадратурные формулы точны для любой нечетной относительно середины отрезка $[a, b]$ функции и следовательно точны для многочленов степени n.

В уточненной оценки погрешности среднюю точку сетки ω_n $\frac{a+b}{2}$ считают с кратностью два и замены n на $n + 1$ в формуле функционала погрешности.